Apuntes Examen de Grado Macroeconomía

Álvaro Castillo Aguilera

Macroeconomía I: Consumo, Inversión y Desempleo

1. Consumo

1.1. Income fluctuation problem

- Households: exogenous income: Y_t; $\gamma \equiv 1/(1+\delta)$ subjetive discount factor, hence δ is the subjective discount rate; additively separable utility $u(C)$: increasing, concave; Decision at the beginning of each period: consumption/saving decision.
- Condición de No Ponzi (CNP):
$$\lim_{T\to+\infty} \frac{A_T}{R^T} = 0$$
- Lo anterior es equivalente a $A_0 = \sum_{t\geq 0} \frac{C_t - Y_t}{R^t}$
- Esta formulación general será la base para casos particulares que se verán a continuación.

1.2. PF/CE/LCT

- Perfect foresight: shut down uncertainty, assume standard CES utility, can have $r \neq \delta$
- Certainty equivalence: consider quadratic utility and $r = \delta$
  - useful to analyze effect of persistence of shocks
  - useless to analyze effect of volatility of shocks
- Life-cycle theory:
  - emphasis on retirement
  - example of non-trivial aggregation

Perfect foresight

Resultado principal es $\frac{C_{t+1}}{C_t} = (\gamma R)^{1/\theta} = (\gamma R)^{\sigma}$. Entonces,

$$\Delta \log C_{t+1} = \frac{\log \gamma + \log R}{\theta} \cong \frac{r-\delta}{\theta} = \sigma(r-\delta)$$

y el grado en que la pendiente de la trayectoria del consumo responde a la tasa de interés es determinado por σ y $r-\delta$. Luego, un incremento en la tasa de interés incrementa la tasa de la cual el consumo crece.

Certain equivalence

Supuestos: función de utilidad cuadrática, $r=\delta$, no hay activos riesgosos y el horizonte es infinito (no esencial).

El resultado principal es el camino aleatorio de Hall: $C_t = E_t C_{t+k}$, $k = 1, 2, 3...$ Utilizando la restricción presupuestaria intertemporal se tendrá:

$$C_t = \frac{r}{1+r}\left\{A_t + \sum_{s\geq 0} \beta^s \mathrm{E}_t Y_{t+s}\right\}$$

Se puede mostrar que:

$$\Delta C_t = \frac{r}{1+r}\sum_{u\geq 0} \beta^u \left\{\mathrm{E}_t Y_{t+u} - \mathrm{E}_{t-1} Y_{t+u}\right\}$$

Entonces, ΔC es proporcional al cambio en el ingreso permanente.

Modigliani's life-cycle theory

- Next consider an economy that is growing (population, income)
- With population growth: more young people than old people, thus more saving than dissaving
- If incomes are growing: the young are saving on a larger scale than the old are dissaving
- In both cases: positive aggregate saving
- The theory does well: it is consistently found that **saving rates are higher where growth is higher**, from the first time that Modigliani looked at the evidence until today when we have more and better data
- The LCT predicts that poor countries save more than rich countries (as fraction of GDP) if they are growing faster.
- Savings rate does not depend on level of income: poor countries save as much as rich countries.

1.3. Precautionary savings

Under certainty-equivalence more income uncertainty (e.g., mean preserving spread) does not affect saving. Por tanto, para explicar el ahorro por precaución es nececesario cambiar de modelo.
En resumen,

- $u''' > 0$ es necesario y suficiente para tener ahorro por precaución.
- Función de utilidad CARA ($u(C) = -e^{-\alpha C}/\alpha$) es un caso particular que permite solución cerrada. Observación: α es el coeficiente de aversión a riesgo constante, se tiene $u''' > 0$ pero el coeficiente de aversión relativa al riesgo crece con el ingreso.
- Otra forma de obtener ahorro por precaución es con el modelo Buffer Stock Saving de Carroll.

Modelando ahorro por precaución

- Economía con dos periodos y condición de primer orden

$$u'\left(y_0 - a_1\right) = \mathbb{E}_{y_1}\left[u'\left(Ra_1 + y_1\right)\right]$$

- Let ε_1 be a random variable with $\mathbb{E}\left[\varepsilon_1\right] = 0$ and $\mathbb{V}\left[\varepsilon_1\right] = \sigma_\varepsilon$.
- Define $\tilde{y}_1 = y_1 + \varepsilon_1$, a mean-preserving spread of y_1. Then $\mathbb{E}\left[\tilde{y}_1\right] = \mu_y$ and $\mathbb{V}\left[\tilde{y}_1\right] = \sigma_y + \sigma_\varepsilon$
- Aplicando la desigualdad de Jansen para $\mathbb{E}_{\varepsilon 1}$ se tiene

$$\underbrace{\mathbb{E}_{y_1,\varepsilon_1}\left[u'\left(Ra_1 + y_1 + \varepsilon_1\right)\right]}_{\text{new } RHS} > \mathbb{E}_{y_1}\left[u'\left(Ra_1 + y_1 + \mathbb{E}\left[\varepsilon_1\right]\right)\right] = \underbrace{\mathbb{E}_{y_1}\left[u'\left(Ra_1 + y_1\right)\right]}_{\text{old } RHS}$$

- RHS shifts upwards and induces a rise in a_1^* and a fall in c_0. (Como la nueva RHS es mayor que antes, para mantener la igualdad de la CPO se requiere que aumente el ahorro, pues u' es decreciente en a_1)

-*Volver a revisar Buffer Stock Saving*

1.4. Liquidity constraints

- Engloba modelos donde los individuos no pueden endeudarse en absoluto o tiene un límite exógeno. Se incluye también el modelo de Carroll. Evidencia empírica no puede distinguir el modelo subyacente.
- Deaton y propensión marginal a consumir: existe un nivel de cash-on-hand a partir del cual se comienza a ahorrar. Previo a eso, la PMC es 1.

1.5. Insurance

- Perfect risk sharing (Towsend, 1994): Se rechaza la hipótesis para agricultores en India y Tailandia. Se rechaza también en ciertos grupos de EEUU.

1.6. Hyperbolic discounting

Laibson et al. work with a quasi-hyperbolic discount factor:

$$U_t = u\left(C_t\right) + \eta \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i u\left(C_{t+i}\right)$$

- In exponential world: $\eta = 1$
- In hyperbolic economy: $\eta < 1$

The main implication of hyperbolic discounting is that the solutions to the DP problem are dynamically inconsistent. What today's optimal plan prescribes 2 (and more periods) in the future may differ from what tomorrow's optimal plan will prescribe for those dates.

1.7. Deficits

Ricardian equivalence

How should governments finance themselves? (debt vs. (lump sum) taxes.)

- Keynesian argument: Financing via debt leads to higher aggregate demand (and hence more economic activity, in particular, more consumption) than financing via taxes.
- Equivalencia ricardiana: If the government raises the public debt (e.g., selling bonds), individuals realize that at some future date they will have to pay higher taxes to finance this debt. Hence they increase their saving in the anticipation of higher taxes, and consumption is unaffected. **That is, economic activity is not affected by how the government finances its expenditures.**
- Ramsey–Cass–Koopmans model: formalización para mostrar que ni D ni T aparecen en la función objetivo o restricción presupuestaria de hogares, por tanto, cómo se financia el gobierno es irrelevante el consumidor representativo.
- Críticas a la equivalencia ricardiana: vidas finitas, restricciones de liquidez, impuestos distorsionanes y ahorro por precacución.

Tax smoothing

- Barro (1979, JPE)
- With distortionary taxes, the choice between debt and taxation does matter.

- Consider a benevolent government that minimize the PV of tax distortions.
- Tax distortions grow more than proportionally with tax revenue.
- Thus it is optimal to smooth taxes over time.

2. Inversión

2.1. Modelo neoclásico: Costo del usuario del capital

- Del proceso de optimización se tiene:

$$\pi_K (K_t, X_t) = (\delta + r_t) p_{K,t} - \dot{p}_{K,t}$$

  Lo que implica que la firma invierte hasta que el beneficio marginal sea igual al costo de oportunidad más la pérdida de valor por precio de capital.

- Tenemos entonces que $c_t \equiv (\delta + r_t) p_{K,t} - \dot{p}_{K,t}$, el costo del usuario del capital, es igual al costo de arriendo implícito del capital.
- Importante avance en modelación: un modelo de demanda por capital derivada del comportamiento optimizante de una firma en un contexto dinámico.
- Paso de demanda por capital a inversión: ad hoc, no es parte del modelo.
- Pobre ajuste empírico.
- Conclusión paper Bustos, Engel, Galetovic (2004): En Chile, durante el período considerado, variaciones del precio relativo de los bienes de capital y la tasa de interés afectan el costo del usuario del capital mucho más que las tasas corporativas.

2.2. Teoría q

- Primera teoría de inversión: determina conjuntamente la producción e inversión óptimas, incluyendo el impacto dinámico de inversión sobre producción.
- Rol clave de q: cuociente del valor marginal de una unidad de capital adicional (VPD de beneficios futuros) y su costo de reemplazo.
- I /K queda determinado por (y es creciente en) q, se decir, q es un estadístico suficiente para medir los beneficios futuros descontados de invertir hoy.
- Se incorpora costos de ajustar el capital: valor de una unidad de capital instalada puede ser distinto del valor de la misma unidad al comprarla.

Denotando por V_t el valor de la firma en t (valor presente descontado de beneficios) se define

$$\lambda_t = \frac{\mathrm{d}V_t}{\mathrm{d}K_t}$$

Luego, la q de Tobin se define como:

$$q_t = \frac{\lambda_t}{p_{K,t}} = \frac{\mathrm{d}V_t/\mathrm{d}K_t}{p_{K,t}}$$

q_t : cambio en el valor de la firma por peso que se gasta en capital.

- Si $q_t > 1$: incentivos para aumentar el capital.
- Si $q_t < 1$: incentivos para disminuir el capital.

Modelando con costos de ajuste

Valor presente descontado de flujos de caja futuros:

$$\begin{array}{ll} V\left(K_0\right) = & \max_{\{I_t, t\geq 0\}} \int_0^\infty \left[\pi\left(K_t, x_t\right) - p_{K,t} I_t - p_{K,t} C\left(I_t, K_t\right)\right] e^{-rt}\, \mathrm{d}t \\ \text{s.a.} & \{x_t, t \geq 0\} \text{ y } K_0 \text{ dados} \\ & \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \end{array}$$

Solución

Problema de control óptimo con variable de control I_t, variable de estado K_t y co-estado λ_t. El Hamiltoniano corriente es

$$H\left(K_t, I_t\right) = \pi\left(K_t, x_t\right) - p_{K,t}\left[I_t + C\left(I_t, K_t\right)\right] + \lambda_t\left(I_t - \delta K_t\right)$$

Mientras que el Hamiltoniano en valor presente, $H\left(K_t, I_t\right) = e^{-rt} H\left(K_t, I_t\right)$ con co-estado $\mu_t = \lambda_t e^{-rt}$.

De la optimización se tiene:

- Ecuación que define I_t implícitamente en función de q_t:

$$1 + C_I\left(I_t, K_t\right) = \frac{\lambda_t}{p_{K,t}} \equiv q_t$$

- Además, ecuación que recupera el resultado del Modelo Neoclásico de Jorgenson (que considera $C(I, K) = 0$):

$$(r+\delta)\lambda_t = \dot{\lambda}_t + \pi_K\left(K_t, x_t\right) - p_{K,t} C_K\left(I_t, K_t\right)$$

Dinámica simplificada en estado estacionario

Suponiendo $p_{K,t} \equiv 1$, $\delta = 0$, $C(I,K) = \frac{1}{2} b \frac{I^2}{K}$, la dinámica del modelo puede resumirse en:

$$\dot{K} = \frac{q-1}{b} K$$
$$\dot{q} = rq - \pi_K(K_t) - \frac{(q-1)^2}{2b}.$$

2.3. Costos de ajuste no convexos

La evidencia para inversión sugiere:

- Ajuste abultado, no suave como se infiere de un modelo con costos convexos de ajuste.
- La mayor parte del tiempo las firmas no ajustan mayormente su capital y existen unos pocos períodos, de grandes ajustes, estos últimos explican la mayor parte de los ajustes del stock de capital de una firma específica.

Modelo simple de costos de ajuste cuadrático

Un modelo simple de costos de ajuste cuadrático, con función objetivo de los agentes

$$\min_{y_{i,t}} \mathrm{E}_t \sum_{j \geq 0} \rho^j \left[c\left(y_{i,t+j} - y_{i,t+j-1}\right)^2 + \left(y_{i,t+j} - \widehat{y}_{i,t+j}\right)^2 \right]$$

Lleva a la siguiente política óptima

$$y_{i,t} - y_{i,t-1} = (1-\alpha)\left(y^*_{i,t} - y_{i,t-1}\right)$$

Donde

$$y^*_{i,t} = (1-\delta) \sum_{k \geq 0} \delta^k E_t\left[\widehat{y}_{i,t+k}\right]$$

Con y^*: objetivo dinámico e $\hat{y}$: objetivo estático. **Conclusions:**

- Quadratic adjustment costs $\rightarrow$ partial adjustment model with dynamic target equal to a weighted average of expected present and future static targets.
- Aggregation of the model with quadratic adjustment costs is straightforward: the relation derived for an individual agent holds as well for the aggregate. Hence

  $$y_t - y_{t-1} = (1-\alpha)\left(y^*_t - y_{t-1}\right)$$

  This justifies using a representative agent model when adjustment costs are quadratic.

Modelo de Calvo

- Se denota la probabilidad de ajuste exógena por π, que es independiente entre firmas y en el tiempo.

- Al momento de ajustar las firmas consideran que puede pasar un largo tiempo antes de poder volver a hacerlo. Por tanto, resuelven

$$\min_{y_{i,t}} \mathrm{E}_t \left[\sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k \left(y_{i,t} - \widehat{y}_{i,t+k}\right)^2 \right]$$

- La solución de lo anterior viene dada por

$$y_{i,t}^* = [1-\rho(1-\pi)] \sum_{k\geq 0} \{\rho(1-\pi)\}^k \mathrm{E}_t \left[\hat{y}_{i,t+k}\right]$$

- **Aggregation**: Since N is large, by the Law of Large Numbers we will have that a fraction 1-π of agents won't adjust while a fraction π will adjust. Because of the independence assumption, those that adjust are representative of the entire population of agents. It follows that their contribution to aggregate y will be $(1-\pi)y_{t-1}$. It follows that:

$$y_t = (1-\pi)y_{t-1} + \pi y_t^*$$

  That is

$$y_t - y_{t-1} = \pi \left(y_t^* - y_{t-1}\right)$$

The principal conclution is that based on aggregate data, it is impossible to distinguish between a model with quadratic adjustment costs, where all agents adjust continuously at the micro level, and a model with lumpy microeconomic adjustment, where a fraction of agents does not adjust in any given period.
Costos no convexos

El caso más simple, para un nivel de K dado se conoce como costos fijos de ajuste:

$$C(I,K) = \begin{cases} F, & \text{si } I \neq 0 \\ 0, & \text{si } I = 0 \end{cases}$$

- Ya no habrá ajustes pequeños

- En muchos periodos será óptimo no ajustarse

- Cuando la firma invierte, su inversión será relativamente grande

Sea k : log-capital de la firma, k^*: log-capital deseado y $x \equiv k^* - k$: variable de brecha o desequilibrio (**inversión mandatada** por el Modelo Neoclásico). La política óptima toma de la forma de una regla Ss:

$$k_t = \begin{cases} k_{t-1} - \delta & \text{si } s < x < S, \\ k_t^*, & \text{si no} \end{cases}$$

Es decir, existen constantes $s < 0 < S$ tales que

- $x \in [s, S]$: la firma no hace nada, de modo que su capital se deprecia en δ lo que equivale a que k cae $-\log(1-\delta) \simeq \delta$. El intervalo $[s, S]$ se conoce como zona de inactividad
- $x > S$: la firma desinvierte (a tasa) $|x|$
- $x < s$: la firma invierte (a tasa) x

La agregación será más suave en modelos con costos no convexos.

Función de probabilidad de ajuste

En un modelo con costos de ajuste no-convexos, podemos definir la función de probabilidad de ajuste (adjustment hazard) como:

$$\Lambda_1(x) = \text{ probabilidad de ajustar el stock de capital cuando la brecha es } x$$

Para modelos bastante más generales que el modelo Ss que esbozamos recién, se puede definir una función de fracción de ajuste esperado que generaliza la función anterior

$$\Lambda_2(x) = \frac{E[\Delta k|x]}{x}$$

Donde $\Lambda_2(x)$ es la fracción del desequilibrio/brecha que una firma cierra, en promedio, cada período, cuando su brecha es x. La definición de $\Lambda_2(x)$ no supone que los ajustes sean "todo o nada" como es el caso en la definición de $\Lambda_1(x)$. En este sentido es un concepto más general.

La idea central de los modelos con costos de ajuste no convexos, es que las firma toleran mejor valores pequeños de $|x|$ que valores grandes de $|x|$. Es decir, cuando $|x|$ es grande, es muy probable que las firmas se ajusten, mientras que para valores pequeños es menos probable. Otras dos características imporantes de los modelos Ss son: (1) respuesta al impulso unitario que varía endógenamente; (2) los incentivos a la inversión son menos efectivos cuando más se requieren.

3. Desempleo

3.1. Salarios de eficiencia: Modelo Shapiro-Stiglitz

Definición: Salarios superiores a la productividad marginal de los trabajadores.

Supuesto central de estos modelos: además del costo evidente, también existe un beneficio de pagar un salario mayor que la productividad marginal del trabajador. Por ejemplo, un salario más alto **puede resolver un problema de agencia del empleador** cuando es costoso monitorear a los trabajadores. En un mercado laboral Walrasiano los trabajadores están indiferentes entre trabajar y no trabajar, luego no tienen incentivos para esforzarse y les da lo mismo si los despiden. Con salarios de eficiencia, en cambio, el trabajador tiene algo que perder si lo despiden y luego se esfuerza aun si existe una probabilidad de que el empleador no lo pille flojeando.

Según lo modelado, se tiene que en estado estacionario las ecuaciones de Bellman con procesos de llegada de Poisson correspondientes son:

$$\begin{aligned}
E: &\quad rV_E = (w - \bar{e}) - b\,(V_E - V_U) \\
S: &\quad rV_S = w - (b + q)\,(V_S - V_U) \\
U: &\quad rV_U = a\,(V_E - V_U)
\end{aligned}$$

Algunos resultados

- Cuando la tecnología de monitoreo es muy buena (q tiende a infinito), la diferencia $V_E - V_U = \frac{\bar{e}}{q}$ se hace cada vez más pequeña (menos es el premio por esforzarse)
- Los trabajadores empleados que se esfuerzan reciben rentas de modo que están mejor empleados que desempleados. Esta afirmación, que parece obvia, no lo es. En un modelo Walrasiano estándar con una oferta grande de trabajadores, un trabajador está indiferente entre trabajar y no trabajar, de modo que $V_E = V_U$ en equilibrio.
- Se tendrá $w = w(\bar{e}, a, b, r, q)$ con derivadas positivas para todas excepto q.
- Para determinar el equilibrio se impone que en estado estacionario el flujo de empleo a desempleo es igual al de desempleo a empleo ($bNL = a(\bar{L} - NL)$. A partir de esto se obtiene la **Condición de No Flojeo (CNF)**:

  $$w = \bar{e} + \left(\frac{b\bar{L}}{\bar{L} - NL} + r\right)\frac{\bar{e}}{q}$$

  Que es el menor salario para inducir esfuerzo cuando el numero de personas contratadas es NL.

En equilibrio la tasa de desempleo de equilibrio es positiva y tenemos desempleo involuntario:

- Existen $\bar{L} - NL_{eq} > 0$ trabajadores igual de productivos que los empleados que están dispuestos a trabajar por un salario que esté entre $\bar{e}$ y w_{eq}, pero no encuentran trabajo.
- La firma no contrata más porque si hay más trabajadores estos pueden empezar a flojear ya que es más probable para ellos volver a encontrar empleo, o bien la firma tiene que subir el salario necesario para que ninguno flojee.
- Otro motivo es que si la firma baja w a un valor inferior a w_{eq}, los trabajadores contratados dejan de esforzarse.
- El equilibrio no es eficiente (debido a las fricciones) y tampoco es “eficiente dadas las restricciones”, pues existen políticas que, tomando la tecnología de monitoreo como dada, pueden mejorar el bienestar: (1) Subsidio al empleo, (2) exigir bono de garantía a los empleados.

3.2. DMP

We assume a well-behaved **matching function**: the number of jobs formed at any moment in time as a function of the number of workers looking for jobs, the number of firms looking for workers and possibly some other variables. A modeling device, like the aggregate production function in competitive macro theory.

Matches "arrive" according to a Poisson process, with instantaneous rate $m_t \equiv m(U, V) = m(uL, vL)$. This quantity is increasing in both its arguments, concave and homogeneous of degree one. Using the CRS assumption, we can express everything in terms of the tightness of the labor market: $\theta = v/u$.

Arrival rates and tightness

- The rate at which vacant jobs become filled

$$q(\theta) = \frac{m(uL, vL)}{vL} = m\left(\frac{u}{v}, 1\right) = m\left(\frac{1}{\theta}, 1\right)$$

- Como la tasa de llegada sigue una distribución exponencial, la duración media de una vacante vendrá dada por $1/q(\theta)$

- Notice that as the number of vacancies per unemployed worker grows, the harder it is to find a worker $q'(\theta) < 0$.

- Workers move into employment according to a related Poisson process with (job-finding) rate

$$\frac{m(uL, vL)}{uL} = \theta q(\theta)$$

  Then, the mean duration of unemployment is $1/\theta q(\theta)$

- Let λ the rate of matching separation. The evolution of unemployment rate then is

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}_t = \lambda\left(1 - u_t\right) - \theta_t q\left(\theta_t\right) u_t$$

- **Beveridge Curve**: it follow that in ss ($\dot{u} = 0$):

$$u = \frac{\lambda}{\lambda + \theta q(\theta)}$$

Bellman equations: firm

Let V_t: Value of a vacancy and J_t: Value of a match accepted at t. Then,

$$\begin{aligned} rV_t &= -pc + \dot{V}_t + q\left(\theta_t\right) \max\left\langle J_t - V_t, 0\right\rangle \\ rJ_t &= p - w_t + \dot{J}_t + \lambda\left(V_t - J_t\right) \end{aligned}$$

Bellman equations: worker

$$\begin{gathered} rW_t = \dot{W}_t + w_t + \lambda \left(U_t - W_t\right) \\ rU_t = \dot{U}_t + z + \theta_t q \left(\theta_t\right) \max \left\langle W_t - U_t, 0\right\rangle \end{gathered}$$

Otras cosideraciones importantes

- Los salarios provienen de una Negociación de Nash
- (Free Entry) At all points in time firms enter the market and open vacancies until value of the vacancy is driven to zero: V_t=0
- El salario que se obtiene a partir de los dos supuestos anteriores es

$$w_t = (1-\beta)z + \beta p + \beta pc\theta$$

- El término $(1-\beta)z + \beta p$ es la suma del salario de reserva y la renta que obtiene el trabajador al compartir la renta que genera una fuente de trabajo ocupada.
- Como $pc\theta = pcv/u$, tenemos que $pc\theta$ es el costo promedio de contratación por trabajador desempleado. Luego, $\beta pc\theta$ dice que el trabajador se lleva una fracción β del ahorro de la firma en costos de contratación cuando se llena una vacante.

Eficiencia en modelos de búsqueda

- En modelos de búsqueda el desempleo es un insumo productivo en la creación de nuevos empleos. Luego no existe ninguna presunción de que el nivel óptimo de desempleo sea cero.
- En efecto, para tener una tasa de desempleo baja se requiere de un gran número de vacantes, lo cual consume recursos. Luego es perfectamente posible tener demasiadas vacantes y un desempleo inferior al socialmente óptimo.
- Por otra parte, los desempleados también representan un costo social en estos modelos, pues no producen. Luego también se puede tener una tasa de desempleo más alta de la socialmente óptima.
- Dos fuentes de ineficiencia: (1) Externalidad de congestión; (2) Problemas de apropiabilidad.

Macroeconomía I: Modelos de crecimiento

1. Modelo Solow-Swan

Supuestos función de producción neoclásica: (1) RCE; (2) Productividad marginal positiva y decreciente en cada insumo; (3) Condiciones de Inada. De RCE se obtienen dos relaciones importantes:

- $\partial Y/\partial K = f'(k)$
- $\partial Y/\partial L = f(k) - k \cdot f'(k)$

Ecuación fundamental para la evolución del capital (per cápita): $\dot{k} = s \cdot f(k) - (n+\delta) \cdot k$.

Algunas características del estado estacionario:

- Sin crecimiento de la tecnología, las cantidades per cápita de y, k, c no crecen en estado estacionario. Y por lo tanto,Y, K, C crecen a una tasa igual al crecimiento de la población (n) en estado estacionario.
- Cambios en la función de producción, la tasa de ahorro, en el crecimiento de la población, y en la tasa de depreciación, tienen efecto en los niveles de la variables bajo análisis en estado estacionario.
- Regla de oro: existe un valor de k que maximiza el consumo. Viene dado por $f'(k^g) = n + \delta$.

Dinámicas de transición

- **Capital**:
$$\gamma_k \equiv \dot{k}/k = s \cdot f(k)/k - (n+\delta)$$
- Cuando hay poco capital el ratio $f(k)/k$ es relativamente alto y el crecimiento es positivo. La razón por la cual las tasas de crecimiento son decrecientes es la existencia de rendimientos decrecientes del capital.
- **Producto**:
$$\dot{y}/y = f'(k) \cdot \dot{k}/f(k) = [k \cdot f'(k)/f(k)] \cdot (\dot{k}/k) = s \cdot f'(k) - (n+\delta) \cdot Sh(k)$$
- [Sobre derivada de $\dot{y}/y$ en k] El término de la derecha es positivo. Si $k < k^*, \dot{k}/k > 0$. En consecuencia, el primer término a la derecha de la ecuación es negativo. La tasa de crecimiento es decreciente en el aumento de k. Si $k > k^*, \dot{k}/k < 0$ por lo que el signo de la derivada es ambiguo. No obstante, cerca de k* el término $\dot{k}/k$ debe ser pequeño, por lo que domina el efecto negativo.
- **Tasa de interés**: Dado que la productividad marginal del capital es decreciente bajo la función de producción neoclásica, la tasa de interés cae monotónicamente hacia su valor de estado estacionario $r^* = f'(k^*) - \delta$.

- **Salario**: Sabemos que $w = f(k) - kf'(k)$. Luego

$$\frac{\partial w}{\partial k} = f'(k) - f'(k) - k \cdot f''(k) = -k \cdot f''(k) > 0$$

Velocidad de convergencia

La velocidad de convergencia viene dada por $\beta \equiv -\partial(\dot{k}/k)/\partial logk$. Para el caso Cobb-Douglas tendremos entonces

$$\beta = (1-\alpha)sAk^{-(1-\alpha)}$$

Esto es, la velocidad de convergencia no es constante sino que case monótonamente en la medida que el stock de capital aumenta hacia su valor de estado estacionario.

Progreso tecnológico y crecimiento balanceado

Existen diferentes formas de modelar el progreso tecnológico:

- Hicks neutral: $Y = T(t) \cdot F(K, L)$
- Harrod neutral: $Y = F(K, L \cdot T(t))$
- Solow neutral: $Y = F(K \cdot T(t), L)$
- Para asegurar crecimiento balanceado el progreso tecnológico debe ser labor-augmenting (Harrod neutral).
- Si existe crecimiento tecnológico en dimensión capital-augmenting y un estado estacionario existe, la función de producción debe tomar la forma Cobb-Douglas.

2. Modelo de Ramsey

- Gran diferencia con Solow-Swan: Hogares que viven hasta el infinito y que eligen su consumo y ahorro para maximizar la utilidad de su hogar sujeto a una restricción presupuestaria.
- Cada hogar maximiza la siguiente función de utilidad

$$U = \int_0^\infty u[c(t)] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt$$

- Se asume que $u(c)$ es creciente, cóncava, $\rho > 0$ y $\rho > n$, de tal manera que U está acotada.
- Para evitar este tipo de esquemas asumiremos que los mercados financieros imponen una restricción en el endeudamiento: el valor presente de los activos debe ser asintóticamente no negativo.

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ a(t) \cdot \exp\left[-\int_0^t [r(v) - n] dv \right] \right\} \geq 0$$

- Esta restricción indica que en el largo plazo la deuda por persona del hogar no puede crecer tan rápido como $r(t)-n$, lo que implica que el nivel de la deuda no puede crecer tan rápido como $r(t)$.

- El Hamiltoniano del problema de los hogares es:

$$H(\cdot) = u[c(t)] \cdot e^{-(\rho-n)t} + v(t)\{w(t) + [r(t)-n] \cdot a(t) - c(t)\}$$

- De las condiciones de primer orden se puede obtener la ecuación de Euler. Esta es una expresión familiar que indica que los hogares van a elegir un consumo que iguale la tasa de retorno r a la tasa de preferencia ρ más la tasa de caída de la utilidad marginal del consumo debido a un incremento en el consumo per cápita. El lado derecho puede ser interpretado como la tasa de retorno del consumo.

$$r = \rho - \left[\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\right]\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)$$

- De la condición de transversalidad $\lim_{t\to\infty}[v(t)\cdot a(t)] = 0$ y condiciones de primer orden se obtiene

$$\lim_{t\to\infty}\left\{a(t)\cdot \exp\left[-\int_0^t [r(v)-n]dv\right]\right\} = 0$$

- **Función de consumo**. De la restricción presupuestaria intertemporal se deriva

$$\int_0^\infty c(t)e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt = a(0) + \int_0^\infty w(t)e^{-[\bar{r}(t)-n]t}dt = a(0) + \tilde{w}(0)$$

- Esto es, el valor presente del consumo debe ser igual a la riqueza de los agentes definida como la suma de los activos iniciales y el valor presente de los ingresos del trabajo.

- Finalmente, integrando al ecuación de Euler entre 0 y t, obtenemos $c(t) = c(0)\cdot e^{(1/\theta)\cdot[\bar{r}(t)-\rho]t}$, lo cual se puede sustituir en la RP intertemporal para obtener $c(0)$.

- **Equilibrio.** En una economía cerrada $a = k$. Entonces, el capital por trabajador efectivo evoluciona a partir de $\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x+n+\delta)\cdot\hat{k}$.

- **Equilibrio.** De la ecuación de Euler y la forma funcional CES asumida, sabemos que

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \left(\frac{1}{\theta}\right)(r-\rho)$$

- Utilizando que $r = f'(\hat{k}) - \delta$ y $\hat{c} = c\cdot e^{-xt}$, tenemos que

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\theta}\cdot\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]$$

- Las ecuaciones en azul junto con la condición de transversalidad describen la dinámica en el modelo de Ramsey y determinan las sendas para $\hat{c}$ y $\hat{k}$.

- **Equilibrio.** Recordando que $a = k$ y que $k = \hat{k} \cdot e^{xt}$, tenemos que

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ \hat{k} \cdot \exp\left(-\int_0^t \left[f'(\hat{k}) - \delta - x - n \right] dv \right) \right\} = 0$$

- Por lo que el retorno al capital en estado estacionario $(f'(\hat{k}^* - \delta)$ debe ser superior a la tasa de crecimiento de K en estado estacionario $(x + n)$.

- Ver comportamiento de la tasa de ahorro y velocidad de convergencia en apuntes escritos. **Importante**: para el comportamiento de la tasa de ahorro, comenzando desde $k_0 < k^{ss}$, hay dos factores que operan de manera opuesta (1) el aumento de k reducirá $f'(k)$, por lo que caerá r y se pierden incentivos a ahorrar a medida que el país crece; (2) si los hogares suavizan consumo, sabiendo que $f(k_0) < f(k^{ss})$, traerán consumo futuro al presente y deberán compensarlo en el futuro con mayor ahorro.

3. Modelo de Ramsey en Economía abierta

- Los activos domésticos y externos son sustitutos perfectos como depósitos de valor por lo que deben pagar la misma tasa de retorno r, la que será la tasa de interés mundial.

- Supongamos que el país local tiene activos netos por persona igual a a_i y un nivel de capital por persona de k_i. La diferencia $k_i - a_i$ corresponderá en este caso a los pasivos externos netos del país, d_i.

- El saldo de la cuenta corriente en este caso corresponde al negativo del cambio en la deuda externa $(D_i = L_i d_i)$. Esto es, el saldo en la cuenta corriente per cápita es igual a $-(\dot{d}_i + n_i d_i)$

- Unico bien en la economía mundial. Los hogares pueden comprarlo en el mercado mundial o local.

- Al considerar la tasa de interés mundial como exógena, las trayectorias de $\hat{k}_i(t)$ y $w_i(t)$ son determinadas independiente de las decisiones de consumo y ahorro de los hogares.

- La dinámica para $\hat{c}_i$ viene dada por

$$\frac{\dot{\hat{c}}_i}{\hat{c}_i} = \frac{1}{\theta_i} \cdot [r - \rho_i - \theta_i x_i]$$

  Mientras que la de acumulación de activos viene dada por

$$\dot{\hat{a}}_i = f\left(\hat{k}_i\right) - (r + \delta_i) \cdot \left(\hat{k}_i - \hat{a}_i\right) - (x_i + n_i + \delta_i) \cdot \hat{a}_i - \hat{c}_i$$

- Si $r > \rho_i - \theta_i x_i$ la economía acumularía suficientes activos como para violar el supuesto de economía pequeña. Luego, es necesario asumir $r \leq \rho_i - \theta_i x_i$. Adicionalmente, de la RP intertemporal se debe cumplir $r > x_i + n_i$

- En este modelo la velocidad de convergencia del capital y producto es infinita (por $f'(k^*) = r + \delta_i$).

El modelo falla pues entrega resultados contrafactuales: (1) el capital no fluye hacia economías pobres; (2) si $r = \rho_i - \theta_i x_i$ el consumo es constante, pero si $r < \rho_i - \theta_i x_i$, el consumo se acerca asintóticamente a cero; (3) a su vez $r < \rho_i - \theta_i x_i$ implica que los activos convergen a un valor negativo equivalente al VP de sus ingresos laborales. Para tener resultados más realistas se modela con restricciones al mercado financiero internacional o costos de ajuste, por ejemplo.

4. Modelo AK

- Modelo más simple de crecimiento endógeno.
- Una interpretación del modelo AK es que el capital debiese ser visto de manera amplia. Incorporando capital humano y otros bienes como gasto de gobierno productivo.
- Se asume $y = AK$. Notar que el producto marginal del capital no es decreciente ($f''(k) = 0$) y las condiciones de Inada no se cumplen.
- Del proceso de optimización tendremos que $r = A - \delta$. Luego,

$$\dot{c}/c = (1/\theta)(A - \delta - \rho)$$

- Esto es, el crecimiento del consumo no depende del stock de capital por persona. La trayectoria del consumo viene dada por: $c(t) = c(0) \cdot e^{(1/\theta)(A-\delta-\rho)t}$.
- Se asumirá que $A > \rho + \delta > (1-\theta)(A-\delta) + \theta n + \delta$, de tal manera que la función de producción es lo suficientemente productiva como para asegurar que c crezca pero no tan productiva como para generar utilidad sin límites (la última desigualdad viene de reemplazar la expresión de c_t en U y verificar que el signo de la exponencial que acompaña sea negativo).
- De $c/k = (A - \delta - n) - \dot{k}/k$ tendremos que k crece a la misma tasa (costante) que c. De $y = Ak$ se tiene que y crece al mismo ritmo que k.
- El modelo **no tiene dinámica de transición**: las variables $k(t)$, $c(t)$ e $y(t)$ comienzan en sus valores iniciales y luego crecen a una tasa $\gamma = (1/\theta)(A - \delta - \rho)$.
- A diferencia del modelo de Ramsey, cambios en los parámetros modifican la tasa de crecimiento de largo plazo, no solo los niveles.

5. Learning by doing and spillovers

- Función de producción de la firma i es $Y_{it} = F(K_{it}, A_{it}L_{it})$.

- Arrow (1962) argumentó que la adquisición de conocimientos por parte de las empresas (aprendizaje) estaba vinculada a la experiencia. Este fenómeno pasó a ser conocido como "aprendizaje por la práctica" (learning by doing). Arrow indicó que una buena medida del aumento de la experiencia era la inversión. En consecuencia, asumiremos que la tecnología crece de forma paralela a la inversión.

- El segundo supuesto es que el conocimiento o nivel tecnológico es un buen público. Lo anterior implica $A_{it} = A_t$ (knowledge spillovers).

- Juntando esos dos supuestos tenemos que $\dot{A}_t = \dot{\kappa}_t$, donde κ_t es el stock agregado de capital.

- Integrando la inversión y el incremento experimentado por el conocimiento desde el principio de los tiempos al presente, tenemos que:

$$A_t = \int_{-\infty}^{t} I(s)ds = \kappa_t$$

- Se asume función de producción Cobb-Douglas:

$$Y_{it} = F\left(K_{it}, \kappa_t \cdot L_{it}\right) = K_{it}^{\alpha}\left(\kappa_t \cdot L_{it}\right)^{1-\alpha}$$

- Si cada productor aumenta K_i, entonces κ aumenta en la misma medida, dado que es la suma de los K_i. En consecuencia, existen rendimientos constantes de capital a nivel agregado, que es lo que permite generar crecimiento endógeno.

- Expresando la función de producción de cada empresa en términos per cápita tenemos $y_i = k_i^{\alpha}\kappa^{1-\alpha}$

- De la condición de la primer orden de cada firma, y utilizando que todas toman la misma decisión, se tiene $r = \alpha \cdot L^{1-\alpha} - \delta$.

- Luego, en equilibrio tenemos

$$\dot{c}/c \equiv \gamma_c = (1/\theta)(r - \rho) = (1/\theta)(\alpha \cdot L^{1-\alpha} - \delta - \rho)$$

  Así, dado que L es constante, la tasa de crecimiento del consumo es constante. Por el mismo argumento que en el modelo AK, $\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = \gamma^*$

6. Modelo con gasto público

- El gasto público entra en la función de producción. Bienes públicos productivos como la infraestructura, I+D público, protección judicial y policial (derechos de propiedad) entre otros.

- La función de producción de cada empresa vendrá dada por $Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot K_i^{\alpha} \cdot G^{1-\alpha}$

- Se asume que el gasto público será un flujo productivo y no bienes de capital acumulables. El gasto vendrá dado por $G = \tau Y$

- De las condiciones de optimalidad de hogares y firma se tendrá que $r + \delta = (1-\tau) \cdot \alpha A^{1/\alpha} \cdot (L\tau)^{(1-\alpha)/\alpha}$ y que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left((1-\tau) \cdot \alpha A^{1/\alpha} \cdot (L\tau)^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta - \rho\right)$$

- Si L y τ son constantes, entonces el producto marginal del capital, y por lo tanto la tasa de retorno del capital, no variará con k y será creciente en L. En este modelo **no hay dinámicas de transición** y las tasas de crecimiento se c, k e y serán iguales a γ.

- El efecto del gobierno en el crecimiento económico ocurre a traves de dos canales: el término $(1-\tau)$ representa el efecto negativo de los impuestos en el producto marginal del capital después de impuestos; el término $\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$ que representa el efecto positivo del gasto público en el producto marginal del capital. El valor de impuestos que maximiza el crecimiento es $\tau = (1-\alpha)$.

- Es fácil mostrar que como en la economía descentralizada las firmas consideran sólo el producto marginal privado del capital, $(1-\tau)\partial Y_i/\partial K_i$, la tasa de crecimiento será menor que la obtenida por el planificador social.

7. Modelo con I+D

- La producción de ideas requiere un elevado costo fijo inicial, que es muy superior al costo marginal de producir unidades adicionales. Bajo competencia perfecta, como el precio es igual al costo marginal, las firmas sufrirían pérdidas al intentar producir tecnología. Por tanto, el poder de mercado es clave.

- **Enfoque Romer (1987)**: Progreso tecnológico toma la forma de un aumento en el número de productos o bienes de capital disponibles como factores de producción. El supuesto fundamental es que no existen rendimientos decrecientes en el número de bienes de capital, por lo que el modelo es capaz de generar un crecimiento económico sostenido, ya que las empresas de I+D siempre desean descubrir nuevos productos.

- Tres tipos de agentes: productores de bienes finales, inventores de bienes de capital y consumidores. La función de producción del productor i de bienes finales viene dada por:

$$Y_i = AL_i^{1-\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N} (X_{ij})^{\alpha}$$

  Donde N es el número de bienes inventados hasta el periodo t y X_{ij} es la cantidad del bien intermedio j que las empresas demandan y compran al momento t. Que la función de producción sea aditivamente separable implica que cada nuevo insumo X es diferente a los anteriores, no son ni mejores ni peores.

- La función de producción presenta rendimientos decrecientes en cada insumo, aunque presenta rendimientos constantes respecto de la cantidad total de los insumos X.

- El progreso tecnológico se presenta bajo la forma de un aumento constante del número de bienes intermedios N. Suponiendo que en cada momento la cantidad de insumos sea igual para cada variedad se tiene $Y_i = AL_i^{1-\alpha} N X_i^{\alpha} = AL_i^{1-\alpha} \cdot (NX_i)^{\alpha} \cdot N^{1-\alpha}$. Tomando L como constante, la producción presenta rendimientos decrecientes respecto de NX si el aumento de NX proviene de un aumento en X, pero no en el caso de que provenga de un aumento en N. Esto último es la base del crecimiento endógeno en este modelo.

- El bien final Y es idéntico para todas las firmas que lo producen y puede ser utilizado para consumo, producción de bienes intermedios o inversión en I+D. Su precio será normalizado a 1.

- Las empresas del sector de I+D enfrentan un proceso de decisión de dos etapas. En la primera etapa tienen que decidir si destinan recursos a la creación de una nueva variedad. Las empresas lo harán si el valor presente de las futuras utilidades esperadas es al menos tan grande como los gastos en I+D que requiere realizar. En la segunda etapa debe determinar el precio óptimo al cual venderá el nuevo bien inventado. El problema se resuelve hacia atrás.

- **Etapa 2**: El VP de los retornos de la invención vienen dados por

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(v) \cdot e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)} dv$$

  Asumiremos que una vez inventado, la producción del bien j cuesta una unidad del bien Y. Esto es, su costo marginal es constante e igual a 1. El flujo de utilidad viene dado por $\pi_j(v) = [P_j(v) - 1] \cdot X_j(v)$, donde

$$X_j(v) = \sum_i X_{ij}(v) = [A\alpha / P_j(v)]^{1/(1-\alpha)} \cdot \sum_i L_i = L \cdot [A\alpha / P_j(v)]^{1/(1-\alpha)}$$

- Dado que no hay variables de estado ni elementos inter-temporales, el productor del bien j decide su precio en cada momento para maximizar su utilidad monopólica. Resolviendo se obtiene que escoje $P_j(v) = P = 1/\alpha > 1$.

- Reemplazando el precio en la demanda por el bien j se obtiene $X_j = A^{1/(1-\alpha)} \alpha^{2/(1-\alpha)} L$. Por lo que la cantidad demandada es constante en el tiempo (pues el precio es constante). De lo anterior, el VP de las utilidades para la empresa que crea la variedad j es:

$$V(t) = LA^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\bar{r}(t,v)\cdot(v-t)} dv$$

- **Etapa 1**: Asumiremos que el costo en crear una nueva variedad es constante e igual a η. Luego, una firma entra en el sector si $V(t) \geq \eta$. La condición de **libre entrada** asegura que $V(t) = \eta$. Esto asegura que $\dot{V}(t) = 0$ y por tanto, $r(t) = r = \pi/\eta$.

- **Equilibrio**: luego de la optimización de los hogares se puede mostrar que la tasa de crecimiento de la economía será

$$\gamma = (1/\theta) \cdot \left[(L/\eta) \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{2/(1-\alpha)} - \rho\right]$$

- **Determinantes del crecimiento**: (1) Aumento de A y disminución de ρ igual que en el modelo AK; (2) Una reducción de η aumenta la tasa de creación de nuevas variedades y por tanto el crecimiento.
- **Optimalidad de Pareto**: la solución descentralizada no es óptima en sentido de Pareto pues los innovadores fijan un precio por sobre el costo marginal.
- **Políticas para fomentar el crecimiento**
  - Subsidio a la compra de bienes intermedios: si es a tasa $1-\alpha$ los productores de Y pagarán sólo αP por X. Los productores de bs. intermedios siguen recibiendo $1/\alpha$ pero la cantidad es ahora la del planner. Existe ganacia estática ($\uparrow Y$) y ganancia dinámica ($\uparrow N$).
  - Subsidio al producto final: Estimula la dda. por bienes intermedios. Se requiere que sea igual a $(1-\alpha)/\alpha$ sobre Y_i, de tal manera que los productores reciban $1/\alpha$ unidades de retorno por cada unidad producida.
  - Subsidio de la investigación: Falla en alcanzar el óptimo social. Aumenta r y γ al nivel del planner, pero no se alcanza el nivel de X óptimo.

Macroeconomía II: Economía Monetaria

Conceptos útiles

- Then the asset market clearing condition leads to

$$\gamma = \sigma(i - \pi - \rho)$$

- The Fisher equation for the interest rate, r_t, in general satisfies:

$$r_t \equiv i_t - \mathrm{E}_t \pi_{t+1}$$

- which in this case, with no uncertainty, leads to

$$r = i - \pi$$

- **Friedman rule**: $i_t = 0$ (Intuition: entirely avoid the cost of holding real balances.). Asumiendo que no hay crecimiento, $\pi = -\rho$

Conclusiones modelo clásico

- Real variables determined independently of monetary policy
- Money is neutral, indeed superneutral (not only money but also the money growth rate has no impact on real variables)
- Optimal policy is undetermined.
- Specification of monetary policy needed to determine nominal variables, but their values have no effect on welfare

Los resultados anteriores vienen del rol del dinero en el modelo: (1) no medium of exchange in these models; (2) no asset with zero nominal interest rate dominated by any interest-bearing asset. Except that since there is no capital, money serves as a store of value.

Money in the utility

El hogar representativo resuelve

$$\begin{aligned} &\text{máx} \mathrm{E}_0 \sum_{t \geq 0} \beta^t u \left(C_t, \frac{M_t}{P_t}, N_t \right) \\ &\text{s.t. } P_t C_t + Q_t B_t + M_t \leq B_{t-1} + M_{t-1} + W_t N_t - T_t \end{aligned}$$

Donde, a diferencia del modelo clásico, ahora el dinero aparece en la función de utilidad (supuesto) y en la restricción presupuestaria.

1. Modelo de Calvo

- Dinámica de precios: $\log P_t = \alpha \log P_{t-1} + (1-\alpha) \log p_t^*$
- Aproximación de Taylor útil: $\Pi_1 (p_t, P_t; Y_t, \xi_t) \simeq c [\log p_t - \log P_t - \zeta \log Y_t]$
- Prices are strategic complements if and only if $\zeta < 1$. In this case, if a fraction of firms does not adjust their price (Calvo assumption), adjusting firms will adjust by less and the real effects of monetary disturbances will be larger.
- Adjusting suppliers choose the reset price p_t^* to maximize

$$\mathrm{E}_t \left\{ \sum_{j \geq 0} \alpha^j \beta^j \Pi \left(p_t^*, P_{t+j}; Y_{t+j}, \xi_{t+j}\right) \right\}$$

- Solving for $\log p_t^*$:

$$\log p_t^* = (1-\alpha\beta) \sum_{j \geq 0} (\alpha\beta)^j \mathrm{E}_t \left[\log P_{t+j} + \zeta \log Y_{t+j}\right]$$

  That is, the optimal reset price is a (geometrically) weighted average of future expected price levels and output gaps.

- **Ejemplo** $\log \mathcal{Y}_t = \log \mathcal{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$: En este caso se propone una solución $AR(1)$ para el producto. De esto se desprende que, dado un shock monetario, una fracción ρ impacta el producto y $(1-\rho)$ afecta la inflación. En el caso $\alpha = 0$ (precios flexibles), $\pi_t = \varepsilon_t$, entonces la inflación responde uno-a-uno a las innovaciones del ingreso nominal.
- When $\zeta = 1$, from (11) we have that $\log p_t^* = \log Y_t$ so that reset prices move one-for-one with nominal income (and do not depend on the aggregate price level or output).
- **Expected response time**: $\mathcal{M} \equiv \sum_{k \geq 0} k I_k / \sum_{k \geq 0} I_k$. This index is a weighted sum of the components of the impulse response function, with weights proportional to the number of periods that elapse until the corresponding response is observed.
- **Derivación NKPC**. Se utiliza ahora $\log p_t^* = (1-\alpha\beta) \sum_{j \geq 0} (\alpha\beta)^j \mathrm{E}_t \left[\log P_{t+j} + \zeta x_{t+j}\right]$, donde $x = \hat{Y} - \hat{Y}^n$. Esto implica que se incorporan los términos que no dependen de shocks monetarios que antes habíamos eliminado ($\hat{Y}^n$). A partir de lo anterior se puede mostrar que la NKPC es:

$$\pi_t = \kappa \left(\hat{Y}_t - \hat{Y}_t^n\right) + \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1}$$

  Con $\kappa = \zeta \frac{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}{\alpha}$.

- **Interpretación de la NKPC**:
  - The NKPC may be viewed as defining a relation between current inflation (on the y -axis) and the output gap (on the x axis) for a given inflation expectation.

- This can be viewed as a micro founded expectations augmented Phillips curve, with slope equal to κ.
- It follows that this short-run Phillips curve will be flatter the smaller the value ζ, that is, the greater the degree of strategic complementarity in pricesetting.
- Also, this short run Phillips curve will be flatter the larger α, that is, the longer the average time between price adjustments.

- Resolviendo hacia adelante se puede mostrar que:

$$\pi_t = \kappa \sum_{j \geq 0} \beta^j \mathrm{E}_t \left[\hat{Y}_{t+j} - \widehat{Y}^n_{t+j} \right]$$

  Thus current inflation is a weighted average of current and future deviations of output from its natural rate values. **Underlying mechanism:** firms adjusting their price in t are forward looking and choose a new price that reflect their expectations of future output gaps.

- **Confronting the evidence**: The IRFs we derived decrease monotonically, they are not hump-shaped as suggested by VAR evidence. If we use reasonable values for the parameters involved (Woodford spends many pages discussing the choice of ζ) the value of $\mathcal{M}$ we obtain suggests considerably less inertia than implied by the VAR evidence.

- **Extensiones de modelo**: Se utilizan para replicar evidencia VAR: (1) IRF con forma de joroba; (2) Más incercia (mayor $\mathcal{M}$).

  Para (1) basta con asumir un crecimiento persistente del ingreso nominal: $\Delta \mathcal{Y}_t = \eta \mathcal{Y}_{t-1} + \varepsilon_t$, con $0 \leq \eta < \alpha$, lo cual es consistente con la evidencia. Sin embargo, aún se requieren valores muy pequeños de ζ para replicar la inercia. Por lo tanto, al supuesto de crecimiento persistente del ingreso nominal se suma heterogeneidad en la probabilidad de ajuste (α distributed according to the c.d.f. $G(\alpha)$ with mean $\bar{\alpha}$). Con estos dos cambios se replica evidencia VAR.

2. Equilibrio en el modelo NK

- Discusión sobre la forma en que se modela el gobierno: agente optimizante vs. reglas de política monetaria.

- Regla de Taylor: $i_t = \phi \pi_t + v_t$. Se puede mostrar fácilmente que cuando $\phi < 1$ hay indeterminación de equilibrio (sunspot equilibria). Caso contrario, si $\phi > 1$ habrá un único equilibrio. $\phi > 1$ es conocido como el **Principio de Taylor:** la autoridad monetaria responde más que uno-a-uno los shocks de inflación, moviendo la tasa de interés real de forma contracíclica.

- El equilibrio se define a partir de 3 blocks: (1) Aggregate Demand Block, (2) Aggregate Supply Block, (3) Monetary Policy Rule.

- Del block de Demanda Agregada se tiene (IS dinámica):

$$x_t = \mathrm{E}_t x_{t+1} - \sigma \left(i_t - \mathrm{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n\right)$$

- Del block de Oferta agregada (NKPC):

$$\pi_t = \kappa x_t + \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1}$$

- Finalmente, una regla de política monetaria puede escribirse como:

$$i_t = c + \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t + v_t$$

  Las tres ecuaciones anteriores definen la aproximación log-linear al equilibrio de expectativas racionales. Los shocks exógenos son r_t^n y v_t.

- **Ineficiencias debido a precios escalonados**: Optimal monetary policy consists in zero inflation and achieves the same allocation of resources as in the corresponding economy with flexible prices. That is, the underlying RBC model, with output equal to its natural rate, Y_t^n, describes how the economy would evolve under the NK model if monetary policy were optimal.

  Note that optimal output is not constant, but equal to output in the counterfactual economy with flexible prices. **That is, stabilizing output is not optimal, what is optimal is stabilizing the output gap** x_t.

- **Divina coincidencia:** Se puede tener cero inflación y cero brecha de producto. Este resultado no se mantendrá.

- How does the monetary authority achieve zero inflation (or a zero output gap)? If, for all $t, \pi_t \equiv 0$ and $x_t \equiv 0$, it follows from the DIS that $i_t = r_t^n$. It follows that monetary policy should focus on achieving $i_t = r_t^n$. In the next lecture we show how this can be done. It is far from obvious, **In particular, setting** $i_t = r_t^n$ **does not work.**

- Observation: the case for price stability emerges from the model even though the policymaker does not attach any weight to such an objective.

3. Implementación en el modelo NK

Sistema de ecuaciones en diferencia lineales con expectativas

Consideramos la siguiente ecuación:

$$\left[\begin{array}{c} x_t \\ y_t \end{array}\right] = A \left[\begin{array}{c} \mathrm{E}_t x_{t+1} \\ \mathrm{E}_t y_{t+1} \end{array}\right] + c \left[\begin{array}{c} e_t \\ \varepsilon_t \end{array}\right]$$

Donde A es una matriz invertible $2x2$ de números reales, c es un número real y e_t, ε_t son procesos estacionarios.

La ecuación tiene una única solución si y sólo si los valores propios de A tienen módulo menor a 1. A se establece un resultado que evita tener que calcular los valores propios en el caso de una matriz de $2x2$ para determinar si estos tienen módulo menor que uno:

[label=()]Caso 1[label=)]

1. *a*) $\det(A) < 1$.
   b) $\det(A) + \operatorname{tr}(A) > -1$.
   c) $\det(A) - \operatorname{tr}(A) > -1$.
2. Caso 2
   [label=)]$\det(A) + \operatorname{tr}(A) < -1$. $\det(A) - \operatorname{tr}(A) < -1$.

Algunas reglas que sirven

- $i_t = r_t^n + \phi_\pi \pi_t + \phi_x x_t$. Existe solución única si y sólo si:

$$\phi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa}\phi_x > 1$$

- Regla forward looking: $i_t = r_t^n + \phi_\pi \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \phi_x \mathrm{E}_t x_{t+1}$. Existe solución única en la intersección de las áreas bajo $\kappa(\phi_\pi - 1) + (1-\beta)\phi_x = 0$ y sobre $\phi_\pi = 1$

Limitaciones de las reglas óptimas

Suponen que la autoridad monetaria puede responder uno-a-uno a r_t^n lo cual plantea los siguientes problemas:

- r_t^n no se observa
- ¿Cuál es el modelo de la economía (para determinar el contrafactual con precios flexibles)?
- ¿Cuál es el valor de los parámetros del modelo?
- ¿Cómo se hace para estimar los shocks a r_t^n en tiempo real?

Lo anterior motiva estudiar **reglas simples** que sean función de observables. Una regla simple es, por ejemplo, $i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y \hat{Y}_t$, donde $\hat{Y}_t = \log\left(Y_t/\bar{Y}\right)$ denota la componente cíclica del producto, que es observable.

Definiendo $\hat{Y}_t^N = \log\left(Y_t^n/\bar{Y}\right)$ y $v_t \equiv \phi_y \hat{Y}_t^n$, podemos reescribir la expresión anterior como como

$$i_t = \rho + \phi_\pi \pi_t + \phi_y x_t + v_t$$

Procediendo tal como lo hicimos para las reglas óptimas, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = A_T \begin{bmatrix} \mathrm{E}_t x_{t+1} \\ \mathrm{E}_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} + \Omega\sigma \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa \end{bmatrix} (r_t^n - \rho - v_t)$$

Existirá solución si:

$$\phi_\pi + \frac{1-\beta}{\kappa}\phi_x > 1$$

La gran diferencia es que **este equilibrio no implementará el óptimo social**, pues $\pi_t \equiv x_t \equiv= 0$ no es solución del sistema.

4. Inflación y bienestar

Possible reasons why higher inflation might reduce welfare:

1. Money holding yield direct utility and higher inflation reduces real money balances
2. Inflation acts as a tax and creates distortions that reduce welfare
3. Higher inflation is usually associated with higher uncertainty in prices, which can lead to misallocation of resources
4. Inflation magnifies the distortions created by staggered pricesetting

In the models with monopolistic competition we covered (New Classical and New Keynesian models) we assumed welfare at time t given by:

$$\mathrm{E}_0 \sum_{t\geq 0} \beta^t \left[u\left(C_t;\xi_t\right) - \int_0^1 v\left(h_t(i);\xi_t\right)\mathrm{d}i\right]$$

Next we derive an approximation for this expression that relates more directly to the endogenous variables in the models, namely, the output gap, x_t, and inflation, π_t. These expression will be useful to: (1) find the "best" policy within a family of simple policies, both for a given model and across several models; (2) Compare policies.
Dejando fuera variables independientes de política, se puede mostrar que

$$U = -\frac{1}{2}\left\{\lambda_1 x^2 + \lambda_2\theta^2 \operatorname{Var}[\log p(i)]\right\}$$

Donde λ_1 y λ_2 están en función de parámetros profundos. El término $\operatorname{Var}(\log p(i))$ dependerá de la forma en que las firmas fijan precios.

Observación: Es útil en este contexto caracterizar el proceso de fijación de precios como una variable Bernoulli, de manera que si Y es una v.a. que toma el valor y_1 con probabilidad α y el valor y_2 con probabilidad $(1-\alpha)$, podemos expresar la variable como $Y = y_2 + (y_1 - y_2)X$, con X una variable que es igual a 1 con probabilidad α y cero con probabilidad $(1-\alpha)$. En tal caso sabemos que

$$\operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}(a+bX) = \operatorname{Var}(bX) = b^2\operatorname{Var}(X) = b^2(1-\alpha)\alpha$$

Para el modelo NK es útil recordar que $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{EVar}(X|Y) + \operatorname{VarE}(X|Y)$.

Usando lo anterior, se tiene las siguientes funciones según el modelo:

- Modelo NC
$$\operatorname{Var}\left[\log p_t(i)\right] = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\pi_t - \mathrm{E}_{t-1}\pi_t\right)^2$$
  - The intuition behind this expression is that what's central about inflation in the NC model **is inflation surprises**. Predictable inflation plays no role. This implies, in particular, that average inflation has no impact on welfare, as in the classic Lucas version of the Phillips curve.
  - The above expression is not what the literature on discretion vs. commitment of the 80s and 90s used. This literature assumed a loss function with a quadratic term in inflation.

- La aproximación final al bienestar social viene dada por
$$U_t \equiv -\Omega L_t + \text{ t.i.p. } + \text{ h.o.t.}$$
with $\Omega > 0$ independent of policy and the loss function, L_t satisfying:
$$L_t = \left(\pi_t - \mathrm{E}_{t-1}\pi_t\right)^2 + \lambda\left(x_t - x^*\right)^2$$
with $\lambda = \kappa/\theta = \zeta(1-\alpha)/\alpha\theta$.

- Modelo NK
$$\operatorname{Var}\left[\log p_t(i)\right] = \alpha \operatorname{Var}\left[\log p_{t-1}(i)\right] + \frac{\alpha}{1-\alpha}\pi_t^2$$
Desarrollando:
$$\sum_{t\geq 0}\beta^t \operatorname{Var}\left[\log p_t(i)\right] = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha\beta)}\sum_{t\geq 0}\beta^t\pi_t^2 + \text{ t.i. p.}$$

- La aproximación final al bienestar social viene dada por
$$U_t \equiv -\Omega L_t + \text{ t.i.p. } + \text{ h.o.t.}$$
with $\Omega > 0$ independent of policy and
$$L_t = \pi_t^2 + \lambda\left(x_t - x^*\right)^2$$
with $\lambda = \kappa/\theta = \zeta(1-\alpha)(1-\alpha\beta)/\alpha\theta$.

5. Discreción versus compromiso

Uno de los conceptos centrales de la política monetaria de las últimas décadas son los beneficios de tener bancos centrales con credibilidad. La idea es que un banco central con credibilidad logra los objetivos de combinar una baja inflación y una baja volatilidad del producto de manera más eficaz que un banco central sin credibilidad.

Denote por Y_t^e el nivel eficiente del producto. Hasta ahora supusimos que $Y_t^e = Y_t^n$ lo que llevó a la divina coincidencia y que el banco central no enfrentaba tradeoff alguno de política monetaria. Abandonaremos este supuesto, suponiendo que $Y_t^e \neq Y_t^n$. Este nuevo supuesto permite construir un modelo donde los bancos centrales enfrentan un tradeoff de corto plazo entre estabilizar precios y estabilizar los niveles de actividad económica. **La naturaleza forward looking del modelo NK lleva a que el óptimo bajo compromiso sea socialmente mejor que bajo discreción.**

- Consideramos dos brechas:
  - $x_t = Y_t - Y_t^e$: brecha relevante para bienestar
  - $\tilde{x}_t = Y_t - Y_t^n$: becha respecto de precios flexibles
- **La brecha relevante para la NKPC es** $\tilde{x}_t$. Luego, de la NKPC:

$$\pi_t = \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \kappa \tilde{x}_t = \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + u_t$$

  con $u_t \equiv \kappa \left(Y_t^e - Y_t^n\right)$. Supondremos que u_t sigue un AR(1): $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t^u$.
- En $t = 0$ el planificador resuelve:

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & \mathrm{E}_0 \sum_{t \geq 0} \beta^t \left(\pi_t^2 + \lambda x_t^2\right) \\ \text{s.t.} & \pi_t = \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + u_t \end{array}$$

  Donde

  - La función objetivo es una aproximación de segundo orden a la función de beneficio social y depende de la brecha relevante para bienestar.
  - Fluctuaciones de u_t dan origen al tradeoff de política. La restricción implica que ya no es posible tener $x_t \equiv \pi_t \equiv 0$.
  - La distribución de los u_t (se les denomina **cost push shocks**) no depende de la política monetaria.
  - Supondremos es la única restricción que enfrenta la autoridad para determinar la trayectoria del producto e inflación que desee. Es decir, la autoridad elige los valores de π_t y x_t que desee, sujeto a que se cumpla la restricción del problema (puede usar RPM para lograrlo).

- **La brecha relevante para la ISD también es $\tilde{x}_t$.** Luego, de la ISD:

$$\tilde{x}_t = \mathrm{E}_t \tilde{x}_{t+1} - \sigma \left(i_t - \mathrm{E}_t \pi_{t+1} - r_t^n \right)$$

  Entonces, usando que

$$x_t = \tilde{x}_t + Y_t^n - Y_t^e$$

  y con un poco de álgebra se obtiene

$$x_t = \mathrm{E}_t x_{t+1} - \sigma \left(i_t - \mathrm{E}_t \pi_{t+1} - r_t^e \right)$$

  con

$$r_t^e = r_t^n + \frac{1}{\sigma} \left[\mathrm{E}_t \left(\Delta Y_{t+1}^e - \Delta Y_{t+1}^n \right) \right]$$

  r_t^e se conoce como la tasa de interés eficiente y no depende de la política monetaria. Como la inflación es forward looking debemos especificar si la autoridad puede comprometer políticas futuras.

- Discreción: La autoridad resuelve una secuencia de problemas

$$\begin{aligned} &\min_{x_t, \pi_t} \quad \pi_t^2 + \lambda x_t^2 \\ &\text{s.t. } \pi_t = \kappa x_t + v_t \end{aligned}$$

  donde $v_t \equiv \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + u_t$ se toma como dado (ausencia de compromiso). De la CPO se obtiene $x_t = -\frac{\kappa}{\lambda} \pi_t$: luego de un shock inflacionario, $\pi_t > 0$, la autoridad debe reducir el producto bajo su nivel óptimo de modo de reducir la inflación.

  Usando lo anterior en la NKPC, se puede mostrar que $x_t = -\kappa \Psi u_t$. Luego, bajo la política discrecional óptima, la autoridad deja que la brecha del producto y la inflación se desvíen de sus valores óptimos en proporción al valor corriente del shock de costos u_t. Si la autoridad eligiese $x_t \equiv 0$, conllevaría una inflación más alta que bajo la política discrecional óptima.

- Compromiso: La autoridad resuelve

$$\begin{array}{ll} \min & \mathrm{E}_0 \sum_{t \geq 0} \beta^t \left(\pi_t^2 + \lambda x_t^2 \right) \\ \text{s.t.} & \pi_t = \beta \mathrm{E}_t \pi_{t+1} + \kappa x_t + u_t \end{array}$$

  Con Lagrangeano

$$L = \mathrm{E}_0 \sum_{t \geq 0} \beta^t \left\{ \frac{1}{2} \left[\pi_t^2 + \lambda x_t^2 \right] + \mu_t \left[\pi_t - \kappa x_t - \beta \pi_{t+1} - u_t \right] \right\}$$

Luego de un largo desarrollo se obtiene que

$$\pi_t = c\left\{u_t - (1-z)\sum_{k\geq 0} z^k u_{t-1-k}\right\}$$
$$x_t = -c\theta \sum_{k\geq 0} z^k u_{t-k}$$

La inflación depende del shock de actual menos lo que está deshaciendo de shocks pasados.

- Otro resultado
  - Bajo discreción: el nivel de precios sigue un proceso no estacionario.
  - Bajo compromiso: el nivel de precios sigue un proceso estacionario.
- La intuición de lo anterior viene de:
  - Bajo discreción: la autoridad busca **estabilizar la inflación**, por lo cual la inflación corriente no responde a shocks de costos pasados: "bygones are bygones" — lo que fue ya pasó.
  - Bajo compromiso: la autoridad busca **estabilizar el nivel de precios**, por lo cual la inflación corriente deshace el efecto de shocks de costos pasados, para que las expectativas de inflación futura no cambien.

6. Modelo de búsqueda

En lo que llevamos del curso hemos supuesto que los agentes económicos (hogares, firmas) demandan dinero, al suponer que los saldos reales son una variable de la utilidad instantánea de los hogares. A continuación presentamos un modelo donde el dinero emerge en equilibrio. Es un modelo de dinero de fíat ('fiat money'), es decir, el dinero que emerge en equilibrio **no tiene valor intrínseco**, no existe un commodity real que dé sustento al dinero.

Supuestos del modelo

- Existe una infinidad (continuo de masa uno) de dos tipos de agentes: comerciantes de mercancías y comerciantes de dinero.
- Existe un gran número de bienes de consumo, lo que son indivisibles y se compran/venden de a una unidad.
- Inicialmente, una fracción M de los agentes tiene una dotación de una unidad de dinero mientras que los agentes restantes (fracción $1-M$) vienen dotados con un bien de consumo.

- Una componente central del modelo es un parámetro exógeno x, con $0 < x < 1$, que captura las preferencias de los individuos. Cada bien es consumido por una fracción x de los individuos y cada individuo está interesado en consumir sólo una fracción x de los bienes.

- Dinero y commodities son almacenables a cero costo y ningún agente puede producir dinero.

- Cada agente se encuentra (parea) con un agente al azar de acuerdo a un proceso de Poission con tasa de llegada igual a uno. Si el pareo es entre comerciantes de dinero no hay intercambio. Si es entre comerciantes de bienes, podría haber trueque (doble coincidencia). Por último, si es entre comerciante de bienes y dinero, habrá intercambio si el comerciante de bienes valora tener dinero y el comerciante de dinero consume de ese bien.

Ecuaciones de Bellman

- Denotamos por Π la probabilidad que asignan los agentes a que un comerciante con que se parea acepte dinero. El parámetro Π es un objeto de equilibrio clave en este modelo.

- En estado estacionario, las funciones de valor de cada agente serán:

$$\begin{aligned} rV_g &= (1-M)x^2(U-\varepsilon) + Mx \max(V_m - V_g, 0) \\ rV_m &= (1-M)x\Pi\left(U - \varepsilon + V_g - V_m\right) \end{aligned}$$

Estrategia óptima

- Denotamos por π la prob. de aceptar dinero que elige un agente óptimamente (es conceptualmente distinta a Π)).

- Luego, la estrategia óptima vendrá dada por

$$\text{Aceptar dinero con probabilidad } \pi = \begin{cases} 1 & \text{si } V_m > V_g, \\ \in [0,1] & \text{si } V_m = V_g \\ 0 & \text{si } V_m < V_g \end{cases}$$

- Existen tres equilibrios

  1. $\Pi = 0$: equilibrio no monetario. No hay demanda por dinero en equilibrio
  2. $\Pi = 1$: equilibrio monetario puro. Todos esperan poder comprar bienes con dinero lo cual lleva a que todos acepten dinero en equilibrio.
  3. $\Pi = x$: equilibrio monetario mixto.

- Se puede mostrar que $V_g(\Pi = 0) = V_g(\Pi = x) < V_g(\Pi = 1)$ y $V_m(\Pi = 0) < V_m(\Pi = x) < V_m(\Pi = 1)$. Concluyendo que el equilibrio monetario puro es **Pareto superior** para ambos tipos de agentes.

- Finalmente, se puede mostrar que maximizar el bienestar definido por ($W = MV_m + (1-M)V_g$) es equivalente a maximizar el bienestar por unidad de tiempo. La cantidad óptima de dinero, M, será función del parámetro exógeno x. Si x es grande el trueque es bastante eficiente y no hay dinero en equilibrio. Caso contrario, vale la pena tener dinero.

7. Modelos con ajuste de precios endógeno

- Under reasonable assumptions the firm's optimal pricing behavior can be described by an Ss policy. This motivates the study of **aggregation** of economies where micro units follow Ss policies.

- Simple Aggregation

  - Caplin and Spulber (QJE, 1987): Monetary shocks are non-negative and their sample path is continuous. Firms follow one-sided Ss policies with the same thresholds. Only monetary shocks.
  - Initial distribution of firms state-variables $z_{i,t} = p_{i,t} - m_t$ is uniform on the entire inaction range $(s, S]$.
  - **Neutrality result**: The distribution of relative prices, $z_{i,t}$ does not vary over time: it remains uniform on $(s, S]$. Real balances (and therefore output) are constant over time. Thus money is neutral in this model.
  - **Conclusion**: **Even though at the micro level we have significant rigidities (most firms are inactive in any given time period), aggregate behavior is indistinguishable from that of an economy with no frictions, where firms adjust their prices continuously.**

- General Aggregation

  - We consider a large number (continuum) of firms that follow the same Ss policies, but face different shocks. Shocks faced by agents have a common and an agent-specific component.
  - We assume that the aggregate shock follows a random walk with drift μ and variance of innovations σ_A^2, while idiosyncratic shocks are independent across agents and independent from the aggregate shock, and follow a random walk with zero drift and variance of innovations σ_I^2.
  - **Important**: Shocks can be positive and negative $\Longrightarrow$ one-sided Ss policies are not optimal anymore $\Longrightarrow$ Caplin-Spulber not valid anymore. Under these assumptions we will have that that firms' optimal policies are two-sided Ss policies
  - We have the following expression for aggregate inflation

$$\pi_t = -\int_{x \notin [L,U]} x f(x,t) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{L} |x| f(x,t) dx - \int_{U}^{\infty} |x| f(x,t) \mathrm{d}x \cong |L| F(L,t) - U(1 - F(U,t))$$

- **IRF** en $t = 0$:

$$\text{IRF}_{0,t} = F(L,t) + (1 - F(U,t)) + |L|f(L,t) + Uf(U,t)$$

  The sum of the first two terms on the r.h.s. of (2) is the fraction of adjusters, this is the contribution to the IRF of the **intensive margin**. This is additional inflation due to those who were **going to adjust anyway**: some adjusted by more (if they increased their price) or by less (if they decreased their price), where we assume $\Delta m > 0$ (an analogous intuition holds if $\Delta m < 0$).

  The sum of the last two terms on the r.h.s. of (2) is the contribution of firms that changed their "adjustment status" because of the marginal shock Δm. This is the contribution to the IRF of the **extensive margin**, that is, the contribution due to the fact that the fraction of adjusters changes because of the marginal shock.

- La IRF se puede expresar entonces como una suma entre el margen intensivo y extensivo: $\text{IRF}_0 = \mathcal{A} + \mathcal{E}$. De aquí se tienen tres implicancias: (1) The Calvo model leads to **more non-neutrality** than any comparable Ss model ($IRF_0^{\text{Calvo}} = \mathcal{A}$); (2) The impulse response function varies over time; (3) The impulse response (upon impact) will be larger after a sequence of positive shocks than after a sequence of negative shocks.

8. Aplicaciones

Inflation Targeting

- Informally, inflation targets are justified because they "help manage the expectations of private agents".

- Two types of inflation targeting: strict and targeting future inflation.

- **Strict targeting**: $\pi_t = \pi^*$. Desarrollando se tiene que $i_t = \pi^* + r_t^n$. If i_t defined above satisfies $i_t \geq 0$, that is, if we can avoid the zero lower bound (ZLB) on the nominal interest rate, we have a unique equilibrium.

- **Targeting future inflation**: $E_t \pi_{t+k} = \pi^*$

  Intuition: the output cost of keeping inflation low will be lower if the Central Bank can have some inflation in the wake of an adverse shock while, at the same time, having a credible commitment to keep inflation under control.

  Se puede mostrar que en este caso:

$$\text{E}_t x_{t+k} = x^*$$
$$\text{E}_t i_{t+k} = \pi^* + \text{E}_t r_{t+k}^n$$

As long as the interest rate policy needed to achieve inflation π_t does not run into the ZLB, there will be **many equilibria** that solve this model: some will be forward loaded, others backward loaded.

Zero Lower Bound

- ¿What is liquidity trap? Today's answer: Shorthand for the zero lower bound (ZLB) on the nominal interest rate.
- Back to the case of strict targeting we have: $i_t = \pi^* + r_t^n$. Assuming a hiring subsidy is in place that cancels the inefficiency inherent in monopolistic competition models we have that choosing $\pi^* = 0$ implements the efficient allocation. Next we introduce the possibility that the natural rate, r_t^n, takes negative values, so that the ZLB will be binding and **there will be periods when the efficient allocation cannot be achieved**.
- **Monetary authority's problem**: Once the ZLB binds, the M.A. is unable to achieve its inflation target and the economy ends up with an interest rate higher than is optimal. **This leads to a recession today** (from the DIS) **and a deflation also today** (from the NKPC). The only way that the DIS and NKPC conditions can be satisfied simultaneously is **if agents expect higher inflation and output** once the natural rate returns to its usual, positive value. This is the basic insight when thinking of policies to mitigate the social costs when the ZLB becomes binding. **The higher inflation they expect, the smaller the recession and deflation.**
- Se podría pensar en fijar $\pi^* \geq -\tilde{r}$ de tal forma que no exista posibilidad de caer en ZLB. Sin embargo, esto no es óptimo. Los beneficios de no caer en ZLB son menores que el costo de tener una inflación tan alta cuando r^n retorne a sus valores positivos.
- Werning (2011) finds the optimal policy with commitment in the presence of a ZLB. This policy is based on having the M.A. commit to keeping $i_t = 0$ for a number of periods after the ZLB stops binding.

Macroeconomía II: Economía Internacional

1. Ten Business-Cyle Facts Around the World

1. [High Global Volatility] The cross-country average standard deviation of output is about twice as large as its U.S. counterpart
2. [Excess Consumption Volatility] On average across countries, private consumption including durables is more volatile than output
3. [Global Ranking of Volatilities] The ranking of cross-country average standard deviations from top to bottom is imports, investment, exports, government spending, consumption, and output.
4. [Procyclicality of the Components of Aggregate Demand] On average across countries, consumption, investment, exports, and imports are positively correlated with output.
5. [Countercyclicality of the Trade Balance and the Current Account] On average across countries, the trade balance, trade-balance-to-output ratio, current account, and current-account-to-output ratio are negatively correlated with output.
6. [Acyclicality of the Share of Government Consumption in GDP] On average across countries, the share of government consumption in output is roughly uncorrelated with output.
7. [Persistence] The components of aggregate supply (output and imports) and aggregate demand (consumption, government spending, investment, and exports) are all positively serially correlated.
8. [Excess Volatility of Poor and Emerging Countries] Business cycles in emerging or poor countries are about twice as volatile as business cycles in rich countries.
9. [Excess Consumption Volatility in Poor and Emerging Countries] The relative consumption volatility is higher in poor and emerging countries than in rich countries.
10. [The Countercyclicality of Government Spending Increases with Income] The share of government consumption is countercyclical in rich countries, but acyclical in emerging and poor countries.

2. Economía abierta con dotación

- The framework is called the intertemporal approach to the current account.
- Desarrollo en apuntes escritos. A continuación se presentan las relaciones y resultados principales.

- Intertemporal resource constraint

$$(1+r)d_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t\left(y_{t+j} - c_{t+j}\right)}{(1+r)^j} \tag{1}$$

- Como por definición $tb_t = y_t - c_t$

$$(1+r)d_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t tb_{t+j}}{(1+r)^j} \tag{2}$$

  Entonces, la posición inicial de deuda externa de un país debe ser igual al VPND de los excedentes del comercio.

- **Definición**: Define nonfinancial permanent income, denoted y_t^p, as the constant level of income that, if received in all future periods $t+j$ for $j \geq 0$, is equal to the expected present discounted value of the stochastic income process as of time t. That is, define y_t^p as the solution to

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y_t^p}{(1+r)^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

  Solving for y_t^p we obtain

$$y_t^p = \frac{r}{1+r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_t y_{t+j}}{(1+r)^j}$$

- **Equilibrio**. Usando que, por los supuestos simplificadores, $E_t c_{t+j} = c_t$, se tiene que el consumo de equilibrio será $c_t = y_t^p - r d_{t-1}$

- **Equilibrio**. De lo anterior en la restricción presupuestaria se obtiene una solución cerrada para tb_t:

$$tb_t = y_t - y_t^p + r d_{t-1}$$

  The trade balance responds countercyclically to changes in current income if permanent income increases by more than current income in response to increases in current income.

- **Equilibrio**. Es directo mostrar que $ca_t = y_t - y_t^p$. Al igual que la balanza de pagos, tendrá un comportamiento contra-cíclico si el ingreso permanente incrementa más que el ingreso corriente.

- Identidad fundamental de la balanza de pagos: $ca_t = -(d_t - d_{t-1})$. La cuenta corriente es igual al cambio de la posición neta de activos de un país.

- **A general principle**: Take another look at the expression $ca_t = y_t - y_t^p$. It says that the current account is used whenever the economy experiences **temporary deviations** of output from permanent income, that is, whenever $y_t - y_t^p \neq 0$. By contrast, permanent output shocks, that is movements in y_t that leave $y_t - y_t^p$ unchanged do not produce movements in the current account. Thus, the following principle emerges:

Finance temporary shocks (by running current account surpluses or deficits with little change in consumption) **and adjust to permanent shocks** (by chan- ging consumption but not the current account).

- **Cerrando el modelo**: Si se asume que el ingreso sigue un proceso AR(1) el modelo entrega resultados contrafactuales: balanza comercial y cuenta corriente pro-cíclicas. Si se asume que el proceso es un AR(2), se puede obtener tb_t y ca_t contra-cíclicas. De esto se desprende que la no-estacionariedad no es necesaria para tener un ajuste contra-cíclico.

- **Cerrando el modelo**: Si se asume un proceso no estacionario ($\Delta y_t = \rho \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$), el ingreso permanente crecerá más que el actual si $\rho > 0$. Entonces, se tendrá el comportamiento contra-cíclico de tb_t y ca_t.

- **Evaluación empírica**: Propagation mechanism invoked by canonical intertemporal model of the current account does not provide a satisfactory account of the observed current account dynamics.

3. Economía abierta con inversión

- De este modelo se derivan dos principios importantes
  - **Principle I:** The more persistent productivity shocks are, the more likely an initial deterioration of the trade balance will be.
  - **Principle II:** The more pronounced are capital adjustment costs, the smaller will be the initial trade balance deterioration in response to a positive and persistent productivity shock.

- Ingreso permanente no financiero en este modelo viene dado por

$$c_t + rd_{t-1} = y_t^p \equiv \frac{r}{1+r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_{t+j} F\left(k_{t+j}\right) - \left(k_{t+j+1} - k_{t+j}\right)}{(1+r)^j}$$

  Thus, the equilibrium condition states that each period households allocate their non-financial permanent income to consumption and to servicing their debt.

- En este modelo, el trade balance viene dado por $tb_t = y_t - c_t - i_t$. Luego, basta que la absorción doméstica $c_t + i_t$ aumente más que el producto para tener una respuesta contra-cíclica.

- **Steady State Equilibrium**: Suppose $A_t = \bar{A}$ for all $t \geq 0$ and $k_0 = \bar{k} = \kappa(\bar{A}/r)$. Then
  - Consumption: $c_t = \bar{c} = -rd_{-1} + \bar{A}F(\bar{k})$ and $d_t = d_{-1}$ for all $t \geq 0$
  - Output: $y_t = \bar{y} = \bar{A}F(\bar{k})$

- Trade balance: $tb_t = \bar{tb} \equiv rd_{-1}$
- Current account: $ca_t = d_{t-1} - d_t = 0$

- **Adjustment to a Permanent Unanticipated Increase in Productivity**: En ppt de clases. Se logra un efecto contra-cíclico de la cuenta corriente y balanza comercial debido a la mayor absorción doméstica.

- **Adjustment to Temporary Productivity Shocks**: Adjustment to a purely temporary shock in the economy with capital is thus the same as the adjustment to a purely temporary endowment shock in the economy without capital studied previously. **Consumption increases by only a small fraction of the increase in income.** Trade balance and current acount are procyclical.

Capital adjustment cost

- They are used to ensure that the predicted volatility of investment relative to the volatility of output does not exceed the observed one.

- In the presence of adjustment costs, investment will be spread out over a number of periods. This will have two consequences for the period 0 adjustment of the trade balance. First, the increase in investment in period 0 will be lower. Second, the increase in permanent income will be lower (because output increases slower to its new permanently higher level) and therefore the consumption response in period 0 will be lower.

- Ahora el ingreso permanente no financiero resta los costos asociados a la inversión $(-\frac{1}{2}(i_{t+j}^2/k_{t+j}))$.

- Investment adjustment costs play no role for long run values of k and q but they do play a role for the short-run dynamics.

- Adjustment to a temporary productivity shock: identical to the economy without capital adjustment costs, as there is no reason to adjust the capital stock.

- Adjustment to a permanent productivity shock: domestic absorption increases by less on impact in the presence of capital adjustment costs. Thus the deterioration of the trade balance in response to a positive permanent productivity shock is smaller on impact.

4. Incertidumbre y mercados financieros internacionales

Mercados incompletos

- Condición de equilibrio: $u'(c_1) = E\{u'(c_2)\}$

- **Caso 1: certainty equivalence** ($u''' = 0$). Se tendrá que $c_1 = E(c_2)$. **In an expected value sense,** therefore, the economy smooths consumption over time. As will become clear below, however, c_1 will differ from actual period 2 consumption and hence the economy is not able to smooth actual consumption over time, which will negatively affect welfare.

- With quadratic preferences ($u''' = 0$), consumption in period 1 does not depend on the variance of output in period 2. Consumption in period 2 depends on the actual realization of output, which implies that $c_2^H > c_2^L$.

- Incomplete markets thus introduce a positivecorrelation between period 2 consumption and output.

- **Case 2: precautionary savings** ($u''' > 0$). En este caso $c_1 < E(c_2)$.

- Unlike the previous case, consumers do not smooth consumption in an expected value sense.

- The uncertainty regarding second period output induces consumers to be more prudent and dissave less than they would otherwise. Hence, the current account deficit will be smaller than in the quadratic case.

Complete capital markets

- En este caso se logra $c_1 = c_2^H = c_2^L$. We conclude that, with complete markets, consumption is fully smoothed even when the output path is uncertain.

- Hence, and in contrast to the incomplete markets case, the correlation between period 2 output and consumption will be zero.

Apuntes prácticos

- El lagrangeano de mercados incompletos incluye un multiplicador por cada posible estado.

- En mercados completos se utiliza la restricción de cada posible estado para reemplazar la cantidad de bonos en la RP del periodo 1. Luego, sólo es necesaria esta restricción en el lagrangeano (un sólo multiplicador).

5. Modelo OLG

- Los modelos OLG implican que tendencias demográficas y la incidencia generacional de los impuestos puede tener un efecto importante en el ahorro nacional y en la cuenta corriente.

- **Sin OLG**: la forma de financiamiento es irrelevante en las decisiones de consumo. Más aún, un déficit del gobierno no afecta las decisiones de consumo. Even though a change in the timing of taxes changes government saving, the national saving schedule doesn't change.

- The assertion that government budget imbalances are irrelevant to resource allocation is called the **Ricardian Equivalence of debt and taxes.** Ricardian equivalence may fail to hold if individuals can't borrow at the same interest rate as the government, when taxes are distorting or if the individuals have finite lives.

- OLG creates a channel through which lump-sum tax policy can alter the economy's equilibrium. In a model with two generation it can be shown that the aggregate consumption is

$$C = \left[\frac{1+(1+r)\beta}{1+\beta}\right]\left(y^Y + \frac{y^O - G - r\tau^Y + rB^G}{1+r}\right)$$

  Thus this is a model in which the Ricardian equivalence of debt and taxes does not hold.

- How do changes in the government's budget deficit affect the nation's **current account balance**? The current account is the change in the economy's total net foreign assets. In an economy withlout investment, the current account is given by

$$\begin{aligned} CA_t = B_{t+1} - B_t &= B_{t+1}^{\mathrm{P}} + B_{t+1}^{\mathrm{G}} - \left(B_t^{\mathrm{P}} + B_t^{\mathrm{G}}\right) \\ &= \left(B_{t+1}^{\mathrm{P}} - B_t^{\mathrm{P}}\right) + \left(B_{t+1}^{\mathrm{G}} - B_t^{\mathrm{G}}\right) \end{aligned}$$

  The current account is the sum of net saving by the private sector and net saving by the government.

6. RBC en economía pequeña y abierta (SOE-RBC)

- In order to make the models we have studied more empirically realistic and to give them a better chance to account for observed business-cycle regularities we add: endogenous labor supply and demand, uncertainty in the technology shock process and capital depreciation.

- The household's maximization problem is

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left(c_t, h_t\right)$$

  subject to

$$\begin{gathered} c_t + i_t + \Phi\left(k_{t+1} - k_t\right) + \left(1 + r_{t-1}\right) d_{t-1} = y_t + d_t \\ y_t = A_t F\left(k_t, h_t\right) \\ k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t \\ \text{lím}_{j \to \infty} E_t \frac{d_{t+j}}{\prod_{s=0}^{j}(1+r_s)} \leq 0 \end{gathered}$$

  Capital adjustment cost, $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0; \Phi''(0) > 0$. El Lagrangeano del problema será:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{U(c_t, h_t) \\
& + \lambda_t \left[A_t F(k_t, h_t) + (1-\delta)k_t + d_t - c_t - (1 + r_{t-1}) d_{t-1} - k_{t+1} - \Phi(k_{t+1} - k_t)\right]\}
\end{aligned}
$$

Que se deriva con respecto a c_t, h_t, d_t, k_{t+1}

- Equilibrio centralizado o descentralizado llevan a la misma solución.
- **Formas de inducir estacionariedad**: lo haremos mediando el supuesto *external debt-elastic interest rate (EDEIR)*

$$
r_t = r^* + p(\widehat{d}_t)
$$

  Donde r^* la tasa de interés mundial constante y $p(\widehat{d}_t)$ es el *country interest-rate premium.* En particular, se asume $p(d) = \psi_1 \left(e^{d-\bar{d}} - 1\right)$. Esto es, la prima país es una función creciente y convexa de la deuda externa neta. Lo útil de estos supuestos es que el estado estacionario será independiente de las condiciones iniciales.
- Se asume función de utilidad de la forma GHH, lo que implica que la oferta laboral será independiente del nivel de consumo.
- Una nueva relación que se añade a los dos principios que vimos antes es: mientras más persistente es el shock tecnológico, más volatilidad del consumo respecto al producto habrá.
- Llevado a los datos, el modelo permite replicar muchos de los hechos estilizados, como prociclicidad de consumo, inversión y horas trabajadas, así como la contraciclicidad del trade balance. Sin embargo, sobrestima las correlaciones de consumo y horas con producto.

7. RBC en países emergentes: shocks de productividad y fricciones financieras

- Can SOE-RBC model also explain business cycles in emerging and poor economies?
- Two important differences between business cycles in developed and emerging and poor economies: (1) Emerging and poor economies are twice as volatile as developed economies; (2) In developed economies consumption is less volatile than output, whereas in emerging and poor economies consumption is at least as volatile as output.
- Una opción para capturar dinámicas de economías pobres o en desarrollo sería aumentar la desviación estándar del shock de productividad. Esto generaría más volatilidad del producto, consumo, inversión y exportaciones netas. El problema es que no todas las volatilidades aumentan en la misma proporción cuando pasamos de un país rico a uno pobre.

- Una forma de lidiar con este último problema es aumentando la persistencia del shock de productividad. Sin embargo, esto afectaría también la auto-correlación del producto, no sólo la volatilidad del consumo. Entonces, existe un trade-off entre usar ρ para calzar el exceso de volatilidad del consumo y usarlo para coincidir la correlación serial del producto.
- **Aguiar and Gopiath (2007)**: proponen añadir un segundo shock de productividad para solucionar el problema anterior. Estos shocks tecnológicos son no estacionarios.
- **Aguiar and Gopiath (2007)**: The underlying premise is that emerging markets, unlike developed markets, are characterized by frequent regime switches, a premise motivated by the dramatic reversals in fiscal, monetary, and trade policies observed in these economies. Consequently, shocks to trend growth are the primary source of fluctuations in these markets as opposed to transitory fluctuations around the trend.
- **Aguiar and Gopiath (2007)**: The estimated model predicts that TPF growth is driven primarily by nonstationary productivity shocks (88 %).
- Hay tres comentarios a los resultados anteriores: (1) Muestra pequeña es problemática, sobre todo para distinguir entre shocks transitorios versus no estacionarios; (2) ¿Qué hay de los otros shocks importantes para economías en desarrollo como los shocks a la tasa de interés país?; (3) ¿qué pasa si se permite una economía con distorsiones?
- **García Cicco , Pancrazi and Uribe (2010)**: Estudian si un modelo RBC con shocks permanentes y transitorios pueden satisfactoriamente dar cuenta de la dinámica agregada en países en desarrollo. Usando una muestra larga (1900-2005) muestran que el modelo hace un trabajo bastante pobre para México y Argentina.
- **García Cicco , Pancrazi and Uribe (2010)**: Luego, estiman el modelo base agregando shocks de preferencias, country-premium shocks y una elasticidad deuda-country premium realista. Encuentran que su modelo imita bastante bien los ciclos económicos para Argentina entre 1900-2005. Notablemente, el modelo asigna un rol insignificante a los shocks permanentes de productividad.

8. Modelo de dos bienes y dos sectores: El rol de los precios relativos

- The presence of non-tradable goods introduces a key tradable goods introduces a key relative price in the economy: the price of non-tradable tradable goods in terms of tradable goods (the inverse of what is commonly defined as the real exchange rate).
- The real exchange rate is the most important relative price in a small open economy as it provides the main adjustment mechanism to both demand and supply shocks.
- The key difference between tradable and non tradable goods lies in their supply elasticity: the supply elasticity of tradable goods is in effect infinite since a small open

economy can buy/sell as many tradable goods as it wants at a given world price (subject of course to its resource constraint). In sharp contrast, non tradable goods must be produced at home. In the case of an endowment economy, this implies that the supply elasticity is zero.

- The adjustment to demand shocks will need to be met by a **change in relative prices**. Even when production is endogenous, a, say, excess demand for non tradable goods relative to tradable goods will require an increase in their relative price to elicit a shift in productive resources from the tradable to the non tradable sector. In this case, the adjustment will come about through both prices and quantities.

- **Boom-bust cycle in a developing country**.
  - During the boom, consumption of both tradable and non tradable goods is high.
  - Since non-tradables must be produced home -whereas tradable goods can be imported- more resources will be needed in the non-tradable goods tradable goods sector.
  - To entice this shift in resources, the relative price of non tradable goods must be high.
  - The good times will thus be characterized by high consumption, trade and current account **deficits**, relatively low production of tradables, relative **high production of non-tradables**, and a **high relative price of non-tradable goods**.
  - At some point, however, consumption will need to adjust to satisfy the economy's intertemporal resource constraint. Put differently, at some point the economy will need to run a trade surplus to repay the external debt incurred in the good times.
  - To run a trade surplus, production of tradable goods must exceed consumption of tradable goods.
  - How does this adjustment come about? It takes place via a fall in the relative price of non-tradable goods (in response to an excess supply of non-tradable goods at the pre-bust relative price). This fall will induce resources to shift from the non-tradable goods sector to the tradable goods sector.
  - The bad times will thus be characterized by low consumption, trade and current account **surpluses**, relatively high production of tradables, relatively low production of non-tradables and a **low relative price of non-tradable goods**.

The basic model

- There exist two physical goods: a tradable and a non-tradable good (both non-storable). The tradable good is the numeraire.

- The endowment path of both goods is exogenously given.

- There is no government.

- Perfect capital mobility prevails in the sense that consumers can buy or sell bonds that are denominated in terms of the tradable good (the numeraire) at a constant real interest rate r.

- Utility function:
$$\int_0^\infty \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) c_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{-\delta t} dt$$
With $\sigma > 0$ and where:
$$c_t = \left[\gamma_t^{\frac{1}{\theta}} \left(c_t^T\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} + (1-\gamma)^{\frac{1}{\theta}} \left(c_t^N\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$
With $0 < \gamma < 1$. If $\theta = 1 \rightarrow$ Cobb-Douglas. If $\theta \rightarrow \infty \rightarrow$ perfect substitutes.

- Consumer's flow constraint:
$$\dot{b}_t = rb_t + y_t^T + p_t y_t^N - c_t^T - p_t c_t^N$$

- **Definition**: the consumption-based price index q is the minimum expenditure $H = c^T + pc^N$ such that $c = 1$ given p. Se puede mostrar que $q \equiv H = [\gamma + (1-\gamma)p^{1-\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}}$. Además, $\lim_{\theta \rightarrow 1} q = p^{1-\gamma}$

- Los niveles de consumo de cada bien vendrán dados por:
$$c^T = \gamma q^\theta c$$
$$c^N = (1-\gamma)\left(\frac{q}{p}\right)^\theta c$$
De lo anterior sigue
$$\frac{(1-\gamma)c_t^T}{\gamma c_t^N} = p^\theta$$

- El desarrollo anterior permite optimizar directamente respecto a c_t:
$$H = \left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right) c_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \lambda_t \left[rb_t + y_t^T + p_t y_t^N - q_t c_t\right]$$
First-order condition:
$$c_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \lambda_t q_t$$
$$\dot{\lambda}_t = \delta\lambda_t - r_t\lambda_t$$
$$\lim_{t\rightarrow\infty} \lambda_t e^{-\delta t} b_t = 0$$

- **Equilibrium**
  - Home-goods market equilibrium: $y_t^N = c_t^N$

- Current account: $\dot{b}_t = rb_t + y_t^T - c_t^T$
- The economy's resource constraint:

$$b_0 + \int_0^\infty y_t^T e^{-rt} dt = \int_0^\infty c_t^T e^{-rt} dt$$

- **Steady state**
  - Consider a stationary equilibrium in which the exogenous variables of the model (y^T and y^N) are expected to remain constant forever, and in which we impose $\delta = r$. Then, given b_0, the following equations implicitly determine the constants levels of c^T, c^N and p:

$$c^T = rb_0 + y^T$$
$$c^N = y^N$$
$$p^\theta = \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{rb_0 + y^T}{y^N}$$

  - **Example:** Increase in net foreign assets in the steady state. c^T must rise now that the economy is richer. This would tend to increase c^N as well. But the latter cannot increase, because supply is fixed. Hence, the relative price of non-tradables must rise to preserve equilibrium.
  - Note also that the trade balance worsens since production of traded goods is constant while consumption of traded goods increases. This wider trade gap is financed by an improved service account.

- **Dynamic behavior**
  - From the CPO it can be shown that

$$\frac{\dot{c}_t^T}{c_t^T} = (\theta - \sigma) \frac{\dot{q}_t}{q_t}$$

    The effect of expected changes in the consumption price index on the time path of tradables' consumption is ambiguous and depends on the sign of $(\theta - \sigma)$.
  - Furthemore

$$\frac{\dot{c}_t^N}{c_t^N} = -\left[\sigma + \theta\left(\eta_t + 1\right)\right] \frac{\dot{q}_t}{q_t}$$

    $\eta > 1$. Note that there is no ambiguity: along a perfect foresight path c_t^N and q_t always move together. This is because the intratemporal and intertemporal effect point in the same direction.

- **Effects of shocks**
  - Effects of permanent shocks are easy to read off the steady state conditions.
  - Consider the case in wich $\sigma = \theta = 1$ and continue assuming that $\delta = r$.

- Under these preferences and assumptions, first order conditions reduce to

$$\frac{\gamma}{c_t^T} = \lambda$$
$$\frac{1-\gamma}{c_t^N} = \lambda p_t$$

- Combining these two conditions we obtain

$$\frac{c_t^N}{c_t^T} = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{1}{p_t}$$

  This condition can be interpreted as a demand function for non tradable goods relative to tradable goods.

- Temporary fall in supply: Suppose, for simplicity, that $b_0 = 0$. At $t = 0$, there is an unanticipated and temporary (equi-proportional) fall in the endowment of both goods (i.e., both y_t^T and y_t^N fall but the ratio y_t^T/y_t^N remains unchanged).
- What happens at time T? c_t^T remains constant at T as follow from $c_t^T = \gamma/\lambda$. Given that the path of c_t^T is flat from time 0 onward and that the present discounted value of tradable resources has fallen, we know that c_t^T will fall at time 0 .
- We also know from $c_t^N = (1-\gamma)/\lambda p_t$, taking into account $y_N = c_N$, that $p_t y_t^N$ remains constant at T. Hence, since y_t^N increases at time T, p_t falls at time T.
- The path of c_t^N simply follows the path of y_t^N.
- We know that

$$p_t = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\frac{c_t^T}{c_t^N}$$

  It follows that p_t will increase at time $t = 0$ because while c_t^N falls by the same amount as y_t^N does, c_t^T falls by less. At time T, p_t falls below its initial level.
- The path of the trade balance follows from the paths of y_t^T and c_t^N. The economy runs a **trade deficit** between time 0 ant T and surplus afterwards. The path of the current account follows inmediately from the trade balance. At $t = T$, the increase in y_t^T is such that the current account becomes balanced.
- Trade deficits go hand in hand with real appreciation while trade surpluses go hand in hand with real depreciation. **Son dos caras de la misma moneda**.

▪ **Fiscal policy, trade imbalances, and the real exchange rate**

- Consumer's flow constraint: $\dot{b}_t = rb_t + y_t^T + p_t y_t^N - \tau_t - c_t^T - p_t c_t^N$
- Asume $\delta = r$. The FOC are

$$c_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \lambda_t q_t$$
$$\tfrac{1-\gamma}{\gamma}\tfrac{c_t^T}{c_t^N} = p_t^{\theta}$$

- We assume that the government always runs a balanced budget: $\tau_t = g_t^T + p_t g_t^N$

- **Equilibrium conditions**.

  Home-goods market equilibrium:

$$y_t^N = c_t^N + g_t^N$$

  Current account:

$$\dot{b}_t = rb_t + y_t^T - c_t^T - g_t^T$$

  Economy's resource constraint:

$$b_0 + \int_0^\infty y_t^T e^{-rt} dt = \int_0^\infty \left(c_t^T + g_t^T\right) e^{-rt} dt$$

- **Changes in government spending**. Suppose that endowments are constant and that the level of government spending are expected to remain constant. Then, initial stationary equilibrium

$$\begin{aligned} c^T &= rb_0 + y^T - g^T \\ c^N &= y^N - g^N \\ p^\theta = \frac{1-\gamma}{\gamma} &\frac{rb_0 + y^T - g^T}{y^N - g^N} \end{aligned}$$

  Los efectos de cambios permanentes en el gasto de gobierno son directos de las relaciones anteriores.

- **Temporary increase in g^T**. Suppose that government spending on traded goods is higher during [0,T) and then returns to its initial level.
- By $c_t^T = \gamma/\lambda$ we know that after the news of the shock the path of consumption of traded goods will be flat over time. Hence, c^T falls on impact by the permanent income component.
- The relative price of non traded goods fall (real depreciation) and remains at that lower level.
- The trade balance (assuming that initial net foreign assets are zero) is in deficit between [0,T) and in surplus afterward.
- **Temporary increase in g^N**. Let's assume now that $\theta > \sigma$. Suppose that government spending on non-traded goods is higher during [0,T) and then returns to its initial level.
- From $y_t^N = c_t^N + g_t^N$, we can infer immediately the path of c^N. First it falls and then it recovers to its original level at T.
- In the case of $\theta > \sigma$ we can show that $c_t^T = \gamma\lambda^{-\sigma} q_t^{\theta-\sigma}$. Si en T aumenta c^N, entonces cae p_t y, por tanto, cae q_t. Lo anterior lleva a una disminución de c_t^T. Entre [0,T) c_t^T aumenta para manterner la RP intertemporal.
- Se genera una apreciación real entre [0,T) ($\uparrow p_t$).

9. Temporary policy

The monetary problem with a cash in advance

- Preferences are given by

$$\int_0^\infty \left[u\left(c_t^T\right)+v\left(c_t^N\right)\right]\exp(-\beta t)dt$$

- Let a_t denote real financial assets: $a_t \equiv m_t + b_t$, where m_t denotes real money balances ($m_t = M_t/E_tP_t^{T*}$ and b_t stands for net foreign bonds.

- The flow constraint will be given by

$$\dot{a}_t = ra_t + y^T + \frac{y^N}{e_t} + \tau_t - c_t^T - \frac{c_t^N}{e_t} - i_t m_t$$

  Where $e_t \equiv P_t^T/P_t^N$ is the real exchange rate.

- Cash-in-advance constraint: Requires that consumers hold a proportion α of real money balances to finance their consumption purchases every period. Formally,

$$m_t = \alpha\left(c_t^T + \frac{c_t^N}{e_t}\right)$$

- Combining CIA constraint with flow constraint and integrating this condition we get the consumer's intertemporal budget constraint. Then, the consumer solves

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\int_0^\infty \left[u\left(c_t^T\right)+v\left(c_t^N\right)\right]\exp(-\beta t)dt \\ &+\lambda\left\{a_0 + \int_0^\infty \left[y^T + \frac{y^N}{e_t} + \tau_t - \left(c_t^T + \frac{c_t^N}{e_t}\right)(1+\alpha i_t)\right]\exp(-rt)dt.\right\}\end{aligned}$$

- The FOCs are

$$\begin{aligned} u'\left(c_t^T\right) &= \lambda\left(1+\alpha i_t\right) \\ v'\left(c_t^N\right) &= \lambda\frac{(1+\alpha i_t)}{e_t}. \end{aligned}$$

  Notice that it follows from the cash-in-advance constrain that to purchase one unit of tradable goods, consumers need to hold units of real money balances. Hence, the effective price of tradable goods comprises the real market price of the good (one) plus the opportunity cost of the units of real money balances required to purchase one unit of the good (i).

- Combining first-order conditions:

$$\frac{u'\left(c_t^T\right)}{v'\left(c_t^N\right)} = e_t$$

  Since the path of the nominal interest rate affects both goods in the same way, it does not affect the marginal rate of substitution between the two goods.

- **Equilibrium conditions**

  - Perfect capital mobility implies that $i_t = i_t^* + \varepsilon_t$
  - Non-tradable goods market clearing: $c_t^N = y^N$.
  - The economy's flow constraint is given by: $\dot{k}_t = rk_t + y^T - c_t^T$, where $k = b + h$. Integrating and imposing the transversality conditions yields the economy's resource constraint:
  $$k_0 + \frac{y^T}{r} = \int_0^\infty c_t^T \exp(-rt)dt$$
  - Finaly, by definition
  $$\frac{\dot{e}_t}{e_t} = \varepsilon_t + \pi_t^* - \pi_t$$

- **Steady state**

  - Suppose that the rate of foreign inflation and devaluation rate are constant. Then, interest parity imply: $i = i^* + \varepsilon$.
  - The FONC and economy resource constraint imply: $c^T = rk_0 + y^T$
  - The real exchange rate will be constant $e = u'(rk_0 + y^T)/v'(y^N)$. Then, $\pi = \pi^* + \varepsilon$.

- Permanent changes in exchange rate policy

  - **Permanent devaluation**. Since there has been an unexpected change in the exchange rate, the **consumer reoptimizes**. In the new perfect foresight path, consumption of tradable goods **will still be constant**. Furthermore, since the **devaluation does not affect the resources** available to this economy, c^T will still be given by $c^T = rk_0 + y^T$.
  - The real exchange rate, therefore, will still given by $e = u'(rk_0 + y^T)/v'(y^N)$. In sum, a devaluation ins neutral.
  - **Permanent reduction in the rate of devaluation**. Given the interest parity, the nominal interest rate will fall permanently.
  - After the consumer reoptimizes, the same first-order conditions will apply. Since it is still the case that the nominal interest rate is constant along the new perfect foresight equilibrium path (though at a lower level than before), consumption of tradable goods will be constant over time and, from resource constraint, equal to $rk_0 + y^T$.
  - Hence the real exchange rate will also be constant over time. Finally, the rate of inflation of non-tradable goods will fall instantaneously by the same amount as the rate of devaluation.
  - In sum, a permanent change in the rate of devaluation reduces inflation with no real effects.

- Temporary stabilization

- For exchange rate policy to have real effects in this model, changes need to be temporary.
- **Temporary reduction in the devaluation rate**. Naturally, the interest parity condition implies that the nominal interest rate behaves analogously,

$$i_t = \begin{cases} i^L = i^* + \varepsilon^L & 0 \leq t < T, \\ i^H = i^* + \varepsilon^H & t \geq T \end{cases}$$

- From the first-order condition we know that tradable consumption will be constant within each subperiod:

$$\begin{aligned} u'\left(\left(c^T\right)^1\right) &= \lambda\left(1 + \alpha i^L\right), \quad 0 \leq t < T, \\ u'\left(\left(c^T\right)^2\right) &= \lambda\left(1 + \alpha i^H\right), \quad t \geq T \end{aligned}$$

  Clearly, we have that $(c^T)^1 > (c^T)^2$
- Given this path of consumption, the trade balance will worsen at $t = 0$ and improve at time T. The current account will therefore go into deficit at $t = 0$, worsen during the transition as the income balance falls over time, and jump back to zero at time T.
- From $e = u'(c_t^T)/v'(y^N)$ it follows that e_t will fall at t=0 (real appreciation) and increase at t=T (real depreciation)
- The path of inflation of non-tradables goods is given by

$$\begin{aligned} \pi_t &= \pi^* + \varepsilon^L \quad & 0 \leq t < T \\ \pi_t &= \pi^* + \varepsilon^H, \quad & t \geq T \end{aligned}$$

- **Interpretation:** The temporary reduction in the devaluation rate can be interpreted as a non credible stabilization plan. The prediction of the model -a consumption boom followed by a late recession, real exchange rate appreciation, and current account deficits- match the stylized facts observed in exchange rate based stabilizations.

- **Extra: Stopping high hyperinflation**:When such astronomical rates of inflation are reached, nominal contracts virtually disappear and all prices (including wages) typically become indexed to the exchange rate. Since all prices are indexed to the exchange rate, **stabilizing the exchange rate is tantamount to stabilizing the price level**. Output costs are relatively small.

10. Sticky Prices and the New Open Economy Macroeconomics

Obstfeld and Rogoff (1995)

- Consider a small country model in which the nontraded goods sector is the locus of monopoly and sticky price problems, and where the traded sector has a single homogeneous output that is priced in competitive world markets.
- Each representative home citizen is endowed with a constant quantity of the traded good each period, $\bar{y}_T$, and has a monopoly over production of one of the nontradables $z \in [0, 1]$.
- The lifetime utility function of representative producer is

$$U_t^j = \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \Big[\gamma \log C_{\mathrm{T},s}^j + (1-\gamma) \log C_{\mathrm{N},s}^j + \frac{\chi}{1-\varepsilon} \left(\frac{M_S^j}{P_s} \right)^{1-\varepsilon} - \frac{\kappa}{2} y_{\mathrm{N},s}(j)^2 \Big]$$

  Where $\varepsilon > 1, \chi > 0$ and $\kappa > 0$. Also C_T is consumption of the traded good and C_N is composite nontraded goods consumption defined by:

$$C_{\mathrm{N}} = \left[\int_0^1 c_{\mathrm{N}}(z)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \mathrm{d}z \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

- The variable P is again the consumption-based price index (defined as the minimum money cost of purchasing one unit of composite real consumption $C_T^{\gamma} C_N^{1-\gamma}$), here given by

$$P \equiv P_{\mathrm{T}}^{\gamma} P_{\mathrm{N}}^{1-\gamma} / \gamma^{\gamma} (1-\gamma)^{1-\gamma}$$

  The law of one price holds in tradables, so that $P_T = \mathrm{E} P_T^*$ (P_T^* is exogenous and constant). The variable P_N is the nontraded goods price index

$$P_{\mathrm{N}} = \left[\int_0^1 p_{\mathrm{N}}(z)^{1-\theta} \mathrm{d}z \right]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

  where $p_N(z)$ is the money price of nontraded good Z and $\theta > 1$
- The individual j's period budget constraint in money terms is

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{T},t} B_{t+1}^j + M_t^j = {} & P_{\mathrm{T},t}(1+r) B_t^j + M_{t-1}^j + p_{\mathrm{N},t}(j) y_{\mathrm{N},t}(j) \\ & + P_{\mathrm{T},t} \bar{y}_{\mathrm{T}} - P_{\mathrm{N},t} C_{\mathrm{N},t}^j - P_{\mathrm{T},t} C_{\mathrm{T},t}^j - P_{\mathrm{T},t} \tau_t \end{aligned}$$

- Un resultado de SS: In the steady state a permanent money shock changes prices of traded and non-traded goods proportionally.
- We now consider the effects of an unanticipated permanent money shock. Log-linearizando se puede mostrar

$$\mathrm{p_T} = \frac{\beta + (1-\beta)\varepsilon}{\beta + (1-\beta)(1-\gamma+\gamma\varepsilon)} \mathrm{m}$$

  Therefore, we can see that if $\varepsilon > 1$, the nominal exchange rate overshoots its long-run level (that is, $e > m > \bar{m}$).

- **Conclution**.Note that an unanticipated rise in the money supply unambiguously improves welfare by coordinating an increase in output across agents in the monopolistic nontraded goods sector.

Apuntes conceptuales

Elasticidad de sustitución
Se define como $\sigma(C) \equiv -\frac{u'(C)}{Cu''(C)}$ y su interpretación es "cuánto consumo actual estoy dispuesto a dar a cambio de consumo futuro". Si es baja, implica que no quiero dar consumo actual por consumo futuro. Caso contrario, estoy dispuesto a entregar harto consumo actual para aumentar el consumo futuro.

El inverso de $\sigma(C)$ es el **coeficiente de aversión relativa al riesgo (CRRA)**. Un ejemplo comúnmente utilizado de elasticidad de sustitución intertemporal constante (CIES o CES) es:

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta} & \theta > 0, \theta \neq 1; \\ \\ \log c & \theta = 1 \end{cases}$$

Donde $\sigma(C) = 1/\theta$ y CRRA $= \theta$, independientes de C.

Apuntes matemáticos (unir con mathfacts.pdf)

Esperanza Arima

$$\Delta Y_t = \phi \Delta Y_{t-1} + e_t$$

then

$$\mathrm{E}_t Y_{t+u} = \mathrm{E}_t \left[\sum_{k=1}^{u} \Delta Y_{t+k} + Y_t \right] = Y_t + \frac{\phi}{1-\phi} \left(1 - \phi^u\right) \Delta Y_t$$

Momentos de Log-normal
Sea Z una variable normal estándar y sean μ y $\sigma > 0$ dos números reales. Entonces, la distribución de la variable $X = e^{\mu+\sigma Z}$ es llamada log-normal, con parámetros μ y σ. Sus mommentos vendrán dados por E[X^n]= $e^{n\mu+n^2\sigma^2/2}$.

Procesos de Poisson
Un proceso que describe el número de eventos en distintos intervalos de tiempo ('proceso de conteo') es un proceso de Poisson con tasa de llegada λ si los tiempos entre llegadas $(T_1 - T_0, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots)$ son i.i.d. con distribución exponencial de parámetro λ. Es decir, la cumulativa y densidad de la distribución de los tiempos entre llegadas satisfacen, para $t \geq 0$:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

El valor esperado de esta v.a. es $1/\lambda$, su varianza es $1/\lambda^2$.

Una caracterización alternativa de un proceso de Poisson es imponiendo condiciones sobre la colección de variables aleatorias que describen el número de eventos ('número de llegadas') en un intervalo de tiempo determinado. Un proceso de llegadas es un proceso de Poission con tasa λ si y sólo si

- El número de llegadas en un intervalo de largo t tiene una distribución de Poisson de parámetro λt
- Si M y N son las variables aleatorias que describen el número de llegadas en intervalos de tiempo disjuntos, entonces son v.a. independientes.

Una v.a. discreta x tiene una distribución Poisson de parámetro λ si su función de probabilidad satisface:

$$P[X = k] = f(k, \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Se tiene que $\mathrm{E}(X) = \lambda$ y $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Fórmula de Leibniz
Definimos:

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} g(\tau, t) \mathrm{d}\tau$$

Entonces la Fórmula de Leibniz viene dada por:

$$G'(t) = g(b(t), t)b'(t) - g(a(t), t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(\tau, t) \mathrm{d}\tau$$

El caso particular en que $g(\tau, t) \equiv g(\tau)$ corresponde al Teorema Fundamental del Cálculo.

Ecuación diferencial de primer orden no-homogénea
Sea $\dot{x}(t) = ax(t) + b$. La solución será

$$x(t) = -b/a + c \cdot exp(at)$$

Ecuación diferencial de primer orden con coeficientes variables
Considere $\dot{y}(t) + a(t) \cdot y(t) + x(t) = 0$, donde el coeficiente $a(t)$ depende del tiempo. El factor de integración en este caso será $e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$. Luego, el lado izquierdo será la derivada de $y(t)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$.

Observación: The lower limit of integration can be an arbitrary constant. Leibniz's rule for differentiation of definite integrals says that $d\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]/dt = f(t)$. Note that we are taking the derivative with respect to the upper limit of integration.

Usando esta información, la solución al problema anterior será:

$$y(t) = -e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau} \cdot \int e^{\int_0^t a(\tau)d\tau} \cdot x(t) \cdot dt + b \cdot e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

Expansión de Taylor

$$F(X) \cong F(\bar{X}) + \sum_{i=1}^{n} F_i(\bar{X}) \left(X_i - \bar{X}_i \right)$$

Let $x_i = \log X_i$. Since $e^x \cong 1 + x$ for small x :

$$X_i - \bar{X}_i = e^{x_i} - e^{\bar{x}_i} = e^{\bar{x}_i} \left(e^{x_i - \bar{x}_i} - 1 \right) \cong e^{\bar{x}_i} \left(x_i - \bar{x}_i \right) = \bar{X}_i \log \left(X_i / \bar{X}_i \right)$$

Hence:

$$[dropfuzzyshadow] F(\bar{X}) + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_i F_i \left(\bar{X}_i \right) \widehat{X}_i$$

with $\widehat{X}_i \equiv \log \left(X_i / \bar{X}_i \right)$

Algunas fórmulas

- $$\sum_{k \geq 0} k\phi^k = \phi / (1 - \phi)^2$$

Comentario personal: Si una ec. de Bellman es maximizada con respecto a una variable que no tiene ley de movimiento (c_t), la envolvente es de la forma típica con todas las derivadas. En cambio, si la ecuación es maximizada con respecto a una variable que tiene ley de movimiento (k_{t+1}), la envolvente no incluye derivada con respecto a $V(k_{t+1}, ...)$.

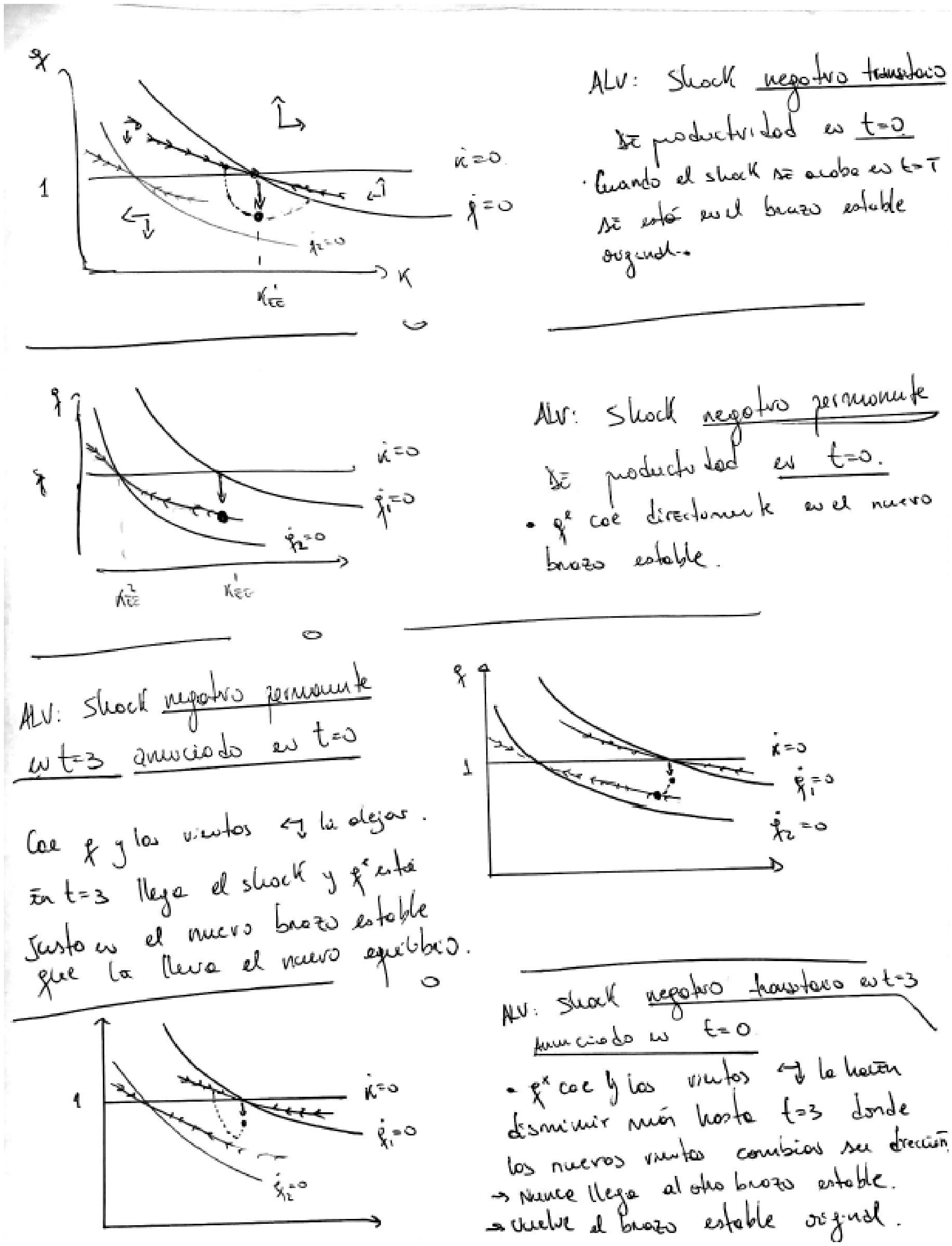

Figura 1: Ajustes modelo q ante shocks de productividad