Apuntes Exámen de Grado Microeconomía

Álvaro Castillo Aguilera

Microeconomía I

1. Teoría del consumidor: Proposiciones

Prop 1.B.2.: Una relación de preferencias $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad sólo si es racional.

Prop 2.F.1. Suponga que la demanda Walrasiana es $H-0$ y satisface WL. Entonces, $x(p,w)$ satisface ADPR si y sólo si la siguiente propiedad se cumple: Para algún *cambio de precios compensados* de (p,w) a $(p',w') = (p', p' \cdot x(p,w))$ se tiene:

$$(p'-p) \cdot [x(p',w') - x(p,w)] \leq 0$$

Comentarios: La ecuación anterior puede escribirse como $\Delta p \cdot \Delta x \leq 0$. Lo anterior puede interpretarse como una forma de la ley de demanda. De hecho, la proposición 2.F.1. nos dice que la ley de demanda se cumple para precios compensados.

Prop 2.F.2. Si la función de demanda Walrasiana es diferenciable, satisface WL, H-O y ADPR, entonces para cualquier (p,w), la matriz de Slutzky $S(p,w)$ satisface $v \cdot S(p,w)v \leq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^L$.

Comentarios: Por lo tanto, es semi definida negativa. Esto implica que $s_{\ell\ell} \leq 0$, lo que significa que el efecto sustitución de el bien ℓ respecto a su propio precio es siempre no positivo.

De lo anterior se desprende que un bien puede ser Giffen en (p,w) sólo si es inferior. En particular, dado que $s_{\ell\ell} = \partial x_\ell(p,w)/\partial p_\ell + [\partial x_\ell(p,w)/\partial w] x_\ell(p,w) \leq 0$, si $x_\ell(p,w)/\partial p_\ell > 0$, debemos tener que $x_\ell(p,w)/\partial w < 0$.

Prop 2.F.3. Suponga que la función de demanda Walrasiana es diferenciable, satisface WL y H-O. Entonces $p \cdot S(p,w) = 0$ y $S(p,w)p = 0$ para todo (p,w).

Resumen sección 2.F:

- El requerimiento de consistencia de ADPR (combinado con H-0 y WL) es equivalente a la ley compensada de la demanda.

- La ley compensada de la demanda implica una matriz de sustitución $S(p, w)$ semi definida negativa.

- Los supuestos hasta aquí no implican simetría de $S(p, w)$, excepto con L=2.

Prop 3.C.1.: Suponga que una relación de preferencias racional $\succeq$ en X es continua. Entonces, existe una función de utilidad continua $u(x)$ que representa a $\succeq$.

Comentario: Es conveniente asumir que $u(\cdot)$ es diferenciable. Sin embargo, es posible que preferencias continuas no sean representables por una función de utilidad diferenciable (Leontief).

Prop 3.D.1.: Si $p \gg 0$ y $u(\cdot)$ es continua, entonces el problema de maximización de utilidad tiene solución.

Prop 3.D.2.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función continua que representa una relación de preferencias l.n.s. definidas en el conjunto $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, la correspondencia de demanda Walrasiana $x(p, w)$ posee las siguientes propiedades:

- Homogeneidad de grado cero en (p, w)

- WL: $p \cdot x = w$, para todo $x \in x(p, w)$

- Convexidad/unicidad: Si $\succeq$ es convexa tal que $u(\cdot)$ es cuasicóncava, entonces $x(p, w)$ es un conjunto convexo. Además, si $\succeq$ es estrictamente convexa tal que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasicóncava, $x(p, w)$ consiste en un único elemento.

Prop 3.D.3.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. La función de utilidad indirecta $v(p, w)$ es:

- Homogénea de grado cero

- Estrictamente creciente en w y no creciente en p_ℓ

- **Cuasi-convexa**: el conjunto $\{(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ es convexo para todo $\bar{v}$

- Continua en p y w.

Prop 3.E.1.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$ y que el vector de precios es $p \gg 0$. Tenemos que:

- Si x^* es el óptimo de UMP cuando $w > 0$, entonces x^* es el óptimo de EMP cuando la utilidad requerida es $u(x^*)$. Mas aún, el valor del mínimo gasto de EMP es exáctamente w.

- Si x^* es el óptimo de EMP cuando $u > u(0)$, entonces x^* es el óptimo de UMP cuando la riqueza es $p \cdot x^*$. Mas aún, el valor de la utilidad maximizada de UMP es exáctamente u.

Prop 3.E.2.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. La función de gasto $e(p, u)$ es:

- Homogénea de grado uno en p
- Estrictamente creciente en u y no decreciente en p_ℓ
- Cóncava en p
- Continua en p y w.

Comentario: De la Proposición 3.E.1. tenemos que, para $p \gg 0$, $w > 0$ y $u > u(\cdot)$ se cumple que $e(p, v(p, w)) = w$ y $v(p, e(p, u)) = u$.

Prop 3.E.3.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, para cualquier $p \gg 0$, la demanda Hicksiana $h(p, u)$ posee las siguientes propiedades:

- Homogenidad de grado cero en p: $h(\alpha p, u) = h(p, u)$, para todo (p, u) y $\alpha > 0$
- No exceso de utilidad: Para todo $x \in h(p, u)$, $u(x) = u$
- Convexidad/unicidad: Si $\succeq$ es convexa, entonces $h(p, u)$ es un conjunto convexo. Por otra parte, si $\succeq$ es estrictamente convexa, de manera que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasicóncava, entonces $h(p, u)$ es un único elemento.

Comentario: Utilizando la Proposición 3.E.1., podemos relacionar la demanda Hicksiana y Walrasiana: $h(p, u) = x(p, e(p, u))$ y $x(p, w) = v(p, v(p, w))$.

Prop 3.E.4.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. y que $h(p, u)$ consiste de un único elemento para todo $p \gg 0$. Entonces, la función de demanda Hicksiana $h(p, u)$ satisface la ley compensada de la demanda: Para todo p' y p'', se cumple que $(p''_\ell - p'_\ell) \cdot [h_\ell(p'', u) - h_\ell(p', u)] \leq 0$.

Prop 3.G.1.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. y estrictamente convexas definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. Para todo p y u, la demanda Hicksiana $h(p, u)$ es el vector derivada de la función de gasto con respecto a precios:

$$h(p, u) = \bigtriangledown_p e(p, u)$$

Esto es, $h_\ell = \partial e(p, u)/\partial p_\ell$ para todo $\ell = 1, ..., L$.

Prop 3.G.2.: Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. y estrictamente convexas definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga además que $h(\cdot, u)$ es continuamente diferenciable en (p, u), y denote su $L \times L$ matriz de derivadas por $D_p h(p, u)$. Entonces,

- $D_p h(p, u) = D^2_p e(p, u)$

- $D_p h(p,u)$ es una matriz semi-definida negativa

- $D_p h(p,u)$ es una matriz simétrica

- $D_p h(p,u)p = 0$

Comentario: Respecto a la sección de Integrabilidad, se tiene que es imposible encontrar preferencias que racionalicen la demanda cuando la matriz de sustitución no es simétrica.

Prop 3.G.3: (Ecuación de Slutsky) Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, para todo (p,w), y $u = v(p,w)$, tenemos:

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$$

o equivalentemente,

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)^T$$

Prop 3.G.4.: (Identidad de Roy) Suponga que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa unas preferencias l.n.s. y estrictamente convexas definidas en $X = \mathbb{R}^L_+$. Suponga además que la función de utilidad indirecta es diferenciable en $(\bar{p},\bar{w}) \gg 0$. Entonces,

$$x(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{1}{\bigtriangledown_w v(\bar{p},\bar{w})} \bigtriangledown_p v(\bar{p},\bar{w})$$

Esto es, para cada $\ell = 1, ..., L$:

$$x_\ell(\bar{p},\bar{w}) = -\frac{\partial v(\bar{p},\bar{w})/\partial p_\ell}{\partial v(\bar{p},\bar{w})/\partial w}$$

Prop 3.I.1.: (Análisis de bienestar con información parcial) Suponga que el consumidor posee preferencias racionales localmente no saciadas. Si $(p^1 - p^0) \cdot x^0 < 0$, entonces el consumidor estará estrictamente mejor bajo el par precio riqueza (p^1, w) que bajo (p^0, w).

Prop 4.B.1.: Una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de consumidores exhiba sendas de expansión de riqueza rectas y paralelas para cualquier vector p es que las preferencias admitan una función de utilidad indirecta a la Gorman, con el coeficiente de w_i igual para todo consumidor i. Esto es:

$$v_i(p, w_i) = a_i(p) + b(p) w_i$$

Comentario: Entonces, la demanda agregada se puede escribir en función de la riqueza agregada si y sólo si todos los consumidores tienen preferencias que admiten una representación de utilidad indirecta a la Gorman con igual coeficiente de riqueza $b(p)$. Esta es una condición muy restrictiva, sin embargo, incluye algunas clases de preferencias interesantes. Por ejemplo, si las preferencias son cuasi-lineales respecto al bien ℓ, entonces existe una función de utilidad indirecta de la forma $a_i + w_i/p_\ell$, en la cual, haciendo $b(p) = 1/p_\ell$, podemos ver que es tipo Gorman con idéntico coeficiente $b(p)$.

Prop 4.C.1.: Si la Demanda Walrasiana de cada consumidor $x_i(p, w_i)$ satisface la ley no compensada de la demanda (ULD), también lo hace la demanda agregada $x(p, w) = \sum_i x_i(p, \alpha_i w)$. Como consecuencia, la demanda agregada $x(p, w)$ satisface el axioma débil.

Comentario: La ley no compensada de la demanda (ULD) no es una consecuencia de la maximización de preferencias. Sin embargo, hay condiciones suficientes para que la demanda individual satisfaga la propiedad (ver Prop 4.C.2. y 4.C.3). La más sencilla de ellas es: Si $\succeq$ es homotética, entonces $x_i(p, w_i)$ satisface la ley no compensada de la demanda.

1.1. Teoría del consumidor: Apuntes

Preferencias

- Supuestos sobre deseabilidad: monotononicidad y l.n.s (la primera implica la segunda).

- Supuestos sobre convexidad: la relación de preferencias $\succeq$ es convexa si $\forall x \in X$, el conjunto del contorno superior $y \in X : y \succeq x$ es convexo. Esto es, si $y \succeq x$ y $z \succeq x$, entonces $\alpha y + (1-\alpha)z \succeq x$, para cualquier $\alpha \in [0,1]$. (Obs1:Curva de indiferencia convexa- TMS decreciente; Obs2: El supuesto de convexidad se cumple sólo si X es convexo).

- Definición 3.B.6.: La relación de preferencias monótona $\succeq$ en $X = \mathbb{R}^L_+$ es homotética si todos los sets de indiferencia están relacionados por expansiones proporcionales a lo largo de los rayos; esto es, si $x \sim y$, entonces $\alpha x \sim \alpha y$, para todo $\alpha \geq 0$.

- Definición 3.B.7.: La relación de preferencias $\succeq$ en $X = (-\infty, \infty) \times {\mathbb{R}_+}^{L-1}$ es cuasilinear respecto al bien 1 si:

  (i) Todos las curvas de indiferencia se desplazan de forma paralela a través del eje del bien 1. Esto es, si $x \sim y$, entonces $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$, para $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
  (ii) El bien 1 es deseable: $x + \alpha e_1 \succ x$, para todo x y $\alpha > 0$.

- Definición 3.C.1.: La relación de preferencias $\succeq$ en X es continua si se preserva bajo límites. Esto es, para cualquier secuencia de pares $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ con $x^n \succeq y^n$ para todo n, $x = \lim_{x\to\infty} x^n$ y, $y = \lim_{x\to\infty} y^n$, tenemos que $x \succeq y$.

- Preferencias continuas equivale a contorno inferior y superior cerrados.

- Preferencias continuas $\succeq$ en $X = {\mathbb{R}_+}^L$ son homotéticas si y sólo si admiten una función de utilidad $u(x)$ que sea homogenea de grado 1.

- Preferencias continuas $\succeq$ en $X = (-\infty, \infty) \times {\mathbb{R}_+}^{L-1}$ son cuasilineares con respecto al primer bien si y sólo si admiten una función de utilidad $u(x)$ de la forma $u(x) = x_1 + \phi(x_2, ..., x_L)$.

Representación de preferencias

- Def: Una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad que representa la relación de preferencias $\succeq$ si $\forall x, y \in X$: $x \succeq y \iff u(x) \geq u(y)$. Sólo el ranking de las alternativas importa.

- Prop: Una relación de preferencias $\succeq$ puede ser representada por una función de utilidad sólo si es racional. *¿Puede cualquier relación de preferencias racionales ser descrita por una función de utilidad? En general, la respuesta es no.*

- Un caso en que **siempre puede ser representada** es cuando X es finito.

- Preferencias continuas asegura la existencia de una función continua que las represente. (*No todas las funciones de utilidad que representan preferencias son continuas. Una transformación estrictamente creciente pero discontinua también representa preferencias.*)
- Preferencias monótonas implican $u(\cdot)$ creciente. Preferencias convexas implican $u(\cdot)$ cuasi-cóncava. A su vez estricta convexidad implica estrica cuasi-concavidad de $u(\cdot)$.
- Preferencias continuas $\succeq$ en $X = \mathbb{R}^L_+$ son homotéticas si y sólo si admiten una función de utilidad $u(x)$ homogénea de grado 1 (esto es, $u(\alpha x) = \alpha u(x)$).
- Preferencias continuas $\succeq$ en $(-\infty, \infty)$ x $\mathbb{R}^{L-1}_+$ son cuasilineares con respecto al primer bien si y sólo si admiten una función de utilidad $u(x)$ de la forma $u(x) = x_1 + \phi(x_2, ..., x_L)$.

Restricción presupuestaria

- El set $\mathbb{R}^{\mathbb{L}}_+$ es un conjunto convexo.
- La restricción Walrasiana, $B_{p,w}$ es un conjunto convexo. (*$B_{p,w}$ será convexo si X es convexo.)*

Demanda Walrasiana

- Propiedades:
  - Homogénea de grado 0: Se prueba escalando la restricción presupuestaria. El set de canastas factibles no cambia.
  - Satisface la ley de Walras: Se prueba con l.n.s. Si la demanda es tal que $p \cdot x < w$, por l.n.s hay una canasta suficientemente cerca tal que $p \cdot y < w$ y $y \succ x$. Contradicción.
  - Convexidad (si $\succeq$ es convexa, de manera que $u(\cdot)$ es cuasi-cóncava, entonces $x(p, w)$ es un set convexo. Si $\succeq$ es estrictamente convexa, de manera que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasi-cóncava, entonces $x(p, w)$ es un único elemento). Para demostrar se asume primero $u(\cdot)$ cuasi-cóncava y dos elementos pertenecientes a la demanda walrasiana, concluyendo que su combinación convexa pertecene a la demanda. Por otra parte, al asumir estricta convexidad se llega a una contradicción y la demanda es un único elemento.
- Implicancias H-0: Prop 2.E.1. Implicancias de WL: prop. 2.E.2,2.E.3.
- Prop 2.F.1. $x(p, w)$ satisface ADPR si y sólo si la siguiente propiedad se cumple: Para algún cambio de precios compensados de (p, w) a $(p', w') = (p', p' \cdot x(p, w))$ se tiene:

$$(p' - p) \cdot [x(p', w') - x(p, w)] \leq 0$$

- Implicancia de ADPR: si se cumple H-O, WL, ADPR, entonces se cumple la ley de demanda compensada ($dp \cdot dx \leq 0$).

- Sobre matriz de Slutsky: el ADPR implica que la matriz sea semidefinida negativa lo que a su vez implica que el efecto sustitución del bien ℓ respecto a su propio precio es siempre negativo. *Por otra parte, una demanda walrasiana que satisface WL, H-O y tiene una matriz de slutsky s.d.n. generalmente satisface ADPR, pero no siempre.*

- Si una función continuamente diferenciable $x(p, w)$ es generada por preferencias racionales, entonces debe ser H-0, satisfacer WL y tener una matriz de slutsky s.d.n. La relación inversa también se cumple, es decir, se pueden recuperar preferencias racionales a partir de una función con tales características.

- Identidad de Roy

$$x(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{1}{\bigtriangledown_w v(\bar{p}, \bar{w})} \bigtriangledown_p v(\bar{p}, \bar{w})$$

UMP

- El análisis toma como base preferencias racionales, continuas y l.n.s., junto con $u(x)$ una función continua que las representa.

- Si $p \gg 0$ y $u(\cdot)$ es continua, el UMP tiene solución.

- Demanda para una Cobb-Douglas:

$$x_i(p, w) = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{L} \alpha_j} \cdot \frac{w}{p_i}$$

Función de utilidad indirecta

- Propiedades de FUI
  - Homogénea de grado 0
  - Estrictamente creciente en w y no creciente en p_ℓ
  - **Cuasi-convexa**: $(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}$
  - Continua en p y w.

EMP

- Las propiedades y proposiciones a continuación asumen $u(\cdot)$ continua que representa preferencias l.n.s definidas en el set de consumo $\mathbb{R}_+^{\mathbb{L}}$.

- Si x^* es el óptimo de UMP cuando $w > 0$, entonces x^* es el óptimo de EMP cuando la utilidad requerida es $u(x^*)$. Mas aún, el valor del mínimo gasto de EMP es exáctamente w. *Lo anterior se demuestra suponiendo que x^* no es el óptimo en EMP, es decir, hay otra canasta x' que minimiza el gasto. Luego, por l.n.s. existe una tercera canasta que es preferida a x' y $p \cdot x'' < w$, por lo que pertenece a la restricción presupuestaria y contradice que x^* sea solución de UMP.*

- Si x^* es el óptimo de EMP cuando $u > u(0)$, entonces x^* es el óptimo de UMP cuando la riqueza es $p \cdot x^*$. Mas aún, el valor de la utilidad maximizada de UMP es exáctamente u. *Se utiliza un método de contradicción similar al anterior y se añade el escalar α cercano a 1. Se contradice que sea solución de EMP. Ver página 59.*

Función de gasto

- La función de gasto se denota como $e(p, u)$. Su valor para algún (p, u) es simplemente $p \cdot x^*$, donde x^* es la solución de **EMP**.
- Propiedades función de gasto
  - Homogénea de grado 1 en precios
  - Estrictamente creciente en u y no decreciente en p_ℓ
  - **Cóncava** en p
  - Continua en p y u.
- Se cumple que: $e(p, v(p, w)) = w$ y $v(p, e(p, u)) = u$

Demanda hicksiana

- Propiedades
  - Homogenidad de grado cero en p. *Demostración viene por el lado de que el óptimo de minimizar $p \cdot x$ es el mismo que el de minimizar $\alpha p \cdot x$*
  - No exceso de utilidad. *Demostración por continuidad de $u(\cdot)$. Suponer que existe $x \in h(p, u)$ tal que $u(x) \geq u$ y multiplicar por α cercano a 1.*
  - Convexidad: si $\succeq$ es convexa, entonces $h(p, u)$ es un set convexo. Por otra parte, si $\succeq$ es estrictamente convexa, de manera que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasi-cóncava, entonces $h(p, u)$ es un único elemento.
- $h(p, u) = x(p, e(p, u))$ y $x(p, w) = h(p, v(p, w))$.
- Satisface la ley de demanda compensada. De esto se desprende que el efecto de un cambio en el propio precio es no positivo: $(p''_\ell - p'_\ell)[h_\ell(p'', u) - h_\ell(p', u)] \leq 0$. Lo anterior no es verdad para la demanda Walrasiana, que no necesita satisfacer la ley de demanda compensada (por ejemplo, la demanda de un bien puede caer cuando su precio cae).
- La demanda hickisiana es: $h(p, u) = \bigtriangledown_p e(p, u)$
- Propiedades de las derivadas de $h(p, u)$
  - $D_p h(p, u) = D_p^2 e(p, u)$
  - $D_p h(p, u)$ es una matriz semi definida negativa.
  - $D_p h(p, u)$ es una matriz simétrica.

- $D_p h(p,u)p = 0$ (implica que debe al menos haber un bien sustituto).

- Equación de Slutsky:

$$\frac{\partial h_\ell(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(p,w)}{\partial w} x_k(p,w) \ \forall \ell, k$$

La compensación hickisiana varía la riqueza de tal manera que la utilidad se mantenga fija ($\triangle w_h = e(p', \bar{u}) - \bar{w}$). La compensación de Slustky ajusta la riqueza de tal manera que se pueda comprar la canasta inicial a los precios nuevos ($\triangle w_s = p' \cdot x(\bar{p}, \bar{w}) - \bar{w}$). En general la hicksiana es menor que la de Slutsky. Sin embargo, para cambios diferenciales de precios son iguales.

Evaluaciones de Bienestar

- Se considera al consumidor con preferencias racionales, continuas y l.n.s. Además, se asume que las funciones de gasto y utilidad indirecta son diferenciables.

- $EV(p^0, p^1, w) = e(p^0, u^1) - e(p^0, u^0) = e(p^0, u^1) - w$: cantidad de dinero que el consumidor está indiferente a aceptar en lugar del cambio de precios (si el consumidor está peor con el cambio de precios es negativa).

- $u^1 = v(p^0, w + EV)$, entonces, $e(p^0, u^1) = e(p^0, v(p^0, w + EV)) = w + EV$.

- $CV(p^0, p^1, w) = e(p^1, u^1) - e(p^1, u^0) = w - e(p^1, u^0)$: ingresos que un planificador debe entregar al consumidor para compensar la modificación de precios después de que esta se produce, devolviéndole su nivel de utilidad original (es negativa si el planificador tiene que pagar un monto positivo al consumidor).

- $v(p^1, w - CV) = u^0$

- **Agregar análisis intuitivo de cuaderno**. El consumidor está mejor bajo p^1 si y sólo si ambas medidas son positivas.

- Para un bien normal se cumple que $EV(p^0, p^1, w) > CV(p^0, p^1, w)$. Mientras que cuando el bien es inferior el resultado es el contrario. Cuando el bien es cuasi linear (no hay efecto riqueza para el bien 1, por ejemplo), $EVyCV$ son iguales

$$h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) = x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, w) = (p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)$$

- Al fijar p^0 y evaluar que cambio de precios es más favorable (si p^1 o p^2), EV es una medida correcta ya que se hace la valoración a precios p^0, mientras que CV no necesariamente correcta pues resta valores de p^1 con p^2.

Respecto a la variación equivalente, suponiendo que $p_1^0 \neq p_1^1$ y $p_\ell^0 = p_\ell^1 = p_\ell$ para todo $\ell \neq 1$, dado que $w = e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1)$ y que $h_1 = \partial e(p,u)/\partial p_1$, podemos hacer:

$$
\begin{aligned}
EV\left(p^0, p^1, w\right) &= e\left(p^0, u^1\right) - w \\
&= e\left(p^0, u^1\right) - e\left(p^1, u^1\right) \\
&= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1\left(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1\right) dp_1
\end{aligned}
$$

A su vez, para la variación compensada tenemos:

$$CV\left(p^0, p^1, w\right) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1\left(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0\right) dp_1$$

Demanda Agregada

- ¿Cuándo es apropiado simplificar al demanda agregada a $x(p, \sum w_i)$? La condición es que la demanda agregada debe ser idéntica para dos distribuciones del mismo nivel de riqueza. Esto es, para todo $(w_1, ..., w_I)$ y $(w_1', ..., w_I')$ tal que $\sum w_i = \sum w_i'$, se cumple que $\sum x_i(p, w_i) = \sum x_i(p, w_i')$.

- Para confirmar que lo anterior se cumple se define un cambio diferencial en la riqueza $(dw_1, ..., dw_I)$ tal que $\sum dw_i = 0$. Si la demanda agregada se puede escribir como función de la riqueza agregada, asumiendo demandas diferenciables, tenemos:

$$\sum_i \frac{\partial x_{\ell i}(p, w_i)}{\partial w_i} \partial w_i = 0$$

para todo ℓ. Lo que puede ser cierto para toda distribución de cambios diferenciales y desde cualquier distribución inicial de riqueza si y sólo si los coeficientes de diferentes dw_i son iguales:

$$\frac{\partial x_{\ell i}(p, w_i)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_{\ell j}(p, w_j)}{\partial w_j}$$

para todo ℓ, cualesquiera individuos i, j y $(w_1, ..., w_I)$. Esto es, para un vector fijo p y cualquier bien ℓ, el efecto riqueza en p debe ser igual para cualquier consumidor que miremos y cualquiera sea su nivel de riqueza.

- Geometricamente, la condición anterior es equivalente a decir que las sendas de expansión de todos los consumidores son paralelas. Un caso especial donde se cumple esto es cuando todos los consumidores poseen las mismas preferencias que son homotéticas. Otro caso es cuando todos los consumidores tienen preferencias que son cuasi lineales respecto al mismo bien (*Una condición necesaria y suficiente para que esto se cumpla es que las preferencias admitan una función indirecta de utilidad a lo Gorman*).

- Cuando la riqueza individual es generada por una regla de distribución siempre es posible escribir la demanda agregada como una función de precios y riqueza agregada: $x(p, w) = \sum x_i(p, w_i(p, w))$

- La DA cumple con continuidad, homogeneidad de grado cero y WL.

- La DA debe satisfacer el ADPR para cualquier cambio de precio-riqueza que es compensado para todo consumidor. Una dificultad aparece en el sentido de que un cambio precio-riqueza que sea compensado en el agregado no asegura que sea compensado para cada individuo.
- Que el ADPR se cumpla para demandas individuales no asegura que la DA lo cumpla.
- Si la demanda Walrasiana de cada consumidor satisface la ley de demanda no compensada (ULD) la demanda agregada satisface el ADPR.
- Prop. 4.C.2. Si $\succeq_i$ es homotética, entonces $x_i(p, w_i)$ satisface ULD.
- Consumidor representativo:
    - Definición 1 (positiva): Un consumidor representativo existe si hay una relación de preferencias racionales $\succeq$ en $\mathbb{R}_+^{\mathbb{L}}$ tal que la demanda agregada es precisamente la demanda Walrasiana generada por estas preferencias. Esto es, $x(p, w) \succ x$ siempre que $x \neq x(p, w)$ y $p \cdot x \leq w$.

Extras

- Si no tengo preferencias l.n.s. al problema de optimización (UMP) debo agregar la restricción $x \geq 0 \iff 0 \geq -x$, lo que implica restar un multiplicador μ al Lagrangeano.
- Cuando la cantidad demandada de un bien numerario es positiva, la demanda de los otros bienes no depende de la riqueza mientras cuando su cantidad demandada es cero, la demanda por bienes cuasi lineales depende de la riqueza. (Para el bien numerario se dice que "la demanda es cuasilineal en x_1", por ejemplo)

2. Teoría del productor

El conjunto de todos los vectores que constituyen planes factibles para la firma es conocido como *conjunto de producción* y es denotado por $Y \subset \mathbb{R}^L$. A veces, es conveniente describir el conjunto Y utilizando una función $F(\cdot)$, llamada función de transformación. Esta función tiene la propiedad de que $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : F(y) \leq 0\}$ y $F(y) = 0$ si y sólo si y es un elemento. El conjunto de puntos límites de Y, $\{y \in \mathbb{R}^L : F(y) = 0\}$, es conocido como *frontera de transformación.*

Si $F(\cdot)$ es diferenciable, y el vector de producción $\bar{y}$ satisface $F(\bar{y}) = 0$, entonces para cualquier bien ℓ y k, el ratio

$$MRT_{\ell,k}(\bar{y}) = \frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_\ell}{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}$$

es llamado la Tasa Marginal de Transformación (MRT) del bien ℓ para el bien k en $\bar{y}$.

La Tasa Marginal de Sustitución Técnica (MRTS) mide el monto adicional del input k que debe ser usado para mantener el nivel de producción $y\bar{q} = f(\bar{z})$ cuando la cantidad del input ℓ decrece marginalmente:

$$MRTS_{\ell,k}(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_\ell}{\partial f(\bar{z})/\partial z_k}$$

Propiedades de los conjuntos de producción

- Y es no vacío.
- Y es cerrado.
- No free lunch: $Y \cap \mathbb{R}^{\mathbb{L}}_{+} \subset \{0\}$.
- Posibilidad de inacción (tener insumos y aún así no producir).
- Libre disposición.
- Irreversabilidad.
- Rendimientos a escala no-crecientes (decrecientes): para todo $y \in Y$ tenemos que $\alpha y \in Y$, con $\alpha \in [0, 1]$.
- Rendimientos a escala no-decrecientes (crecientes): para algún $y \in Y$ tenemos que $\alpha y \in Y$, para algún $\alpha \geq 1$.
- Retornos constantes a escala: si $y \in Y$ implica que $\alpha y \in Y$, para $\alpha \geq 0$.
  - Y satisface retornos constantes a escala si y sólo si $f(\cdot)$ es homogénea de grado uno
- Aditividad: si $y \in Y$ e $y' \in Y$, entonces $y + y' \in Y$. Esto implica que para un entero positivo k, $ky \in Y$.

- El conjunto de producción es convexo.
  - Si la inacción es posible, entonces convexidad implica que Y tiene rendimientos no-crecientes a escala.
  - Y es convexa si y sólo si la función de producción es cóncava (for a single-output technology).
- Y es un cono convexo. Esto es una mezcla de convexidad y rendimientos constantes a escala. Formalmente, Y es un cono convexo si para vectores de producción $y, y' \in Y$, tenemos $\alpha y + \beta y' \in Y$, con $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.
  - El set de producción Y es aditivo y satisface retornos no-crecientes a escala si y sólo si es un cono convexo.

Comentario: Para una tecnología de un output, las propiedades del conjunto de producción se trasladan fácilmente a las propiedades de la función $f(\cdot)$. (Esto lo dice luego del punto 9).

Maximización de beneficios (PMP)

- En este item se asume que Y satisface la propiedad de *no vacío, cerradura y libre disposición*.
- Si el conjunto de producción Y es convexo, entonces las condiciones de primer orden no sólo solamente necesarias sino que suficientes para la determinación de la solución.

Prop 5.C.1.: Suponga que $\pi(\cdot)$ es la función de beneficios del conjunto de producción Y y que $y(\cdot)$ es la correspondencia de oferta asociada. Asuma también que Y es cerrado y satisface la libre disposición. Entonces:

1. $\pi(\cdot)$ es homogénea de grado uno.
2. $\pi(\cdot)$ es convexa.
3. Si Y es convexo, entonces $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leq \pi(p), \forall p \gg 0\}$
4. $y(\cdot)$ es homogénea de grado cero.
5. Si Y es convexo, entonces $y(p)$ es un set convexo para todo p. Si Y es estrictamente convexo, entonces $y(p)$ es un único elemento.
6. (Hotelling's Lemma) Si $y(\bar{p})$ consiste en un único punto, entonces $\pi(\cdot)$ es diferenciable en $\bar{p}$ y $\bigtriangledown\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$.
7. Si $y(\cdot)$ es una función diferenciable en $\bar{p}$, entonces $Dy(\bar{p}) = D^2\pi(\bar{p})$ es una matriz simétrica y s.d.n. con $Dy(\bar{p})\bar{p} = 0$.

La propiedad 7 (2da derivada de $\pi(\cdot)$ es una matriz simética y s.d.n) es la expresión matemática de la ley de oferta. A diferencia de la teoría de la demanda, aquí no hay requerimientos de compensación ya que no hay restricción presupuestaria y por lo tanto, no hay efecto riqueza, sólo sustitución. La ley de la demanda se expresa como:

$(p - p')(y - y') \geq 0.$

Por otro lado, la propiedad 7 implica que la matriz $Dy(p)$, la matriz de sustitución de la oferta, tiene propiedades que son paralelas a la matriz de sustitución de la teoría de demanda. Así, el efecto sustitución propio es no-negativo $[\partial y_\ell(p)/\partial p_\ell \geq 0, \forall \ell]$ y los efectos sustitución son simétricos $[\partial y_\ell(p)/\partial p_k = \partial y_k(p)/\partial p_\ell, \forall \ell, k]$.

Minimización de costos (CMP)

El valor optimizado de la función $w \cdot z$ viene dado por la función de costo $c(w, q)$ mientras que la función (o correspondencia) de demanda por insumos que minimiza es conocida como la demanda condicional por factores $z(w, q)$.

Como en el PMP, si el conjunto de producción Y es convexo (i.e., si $f(\cdot)$ es cóncava), entonces la CPO es no sólo necesaria sino que suficiente para que z^* sea un óptimo en el CMP.

Prop 5.C.2.: Suponga que $c(w, q)$ es la función de costo de una tecnología Y con un único output, con función de producción $f(\cdot)$ y $z(w, q)$ es la correspondencia de demanda condicional de factores asociada. Asuma además que Y es cerrado y satisface libre disposición. Entonces:

- $c(\cdot)$ es homogénea de grado uno en w y no decreciente en q.
- $c(\cdot)$ es cóncava en w.
- $z(\cdot)$ es homogénea de grado cero en w.
- Si el conjunto $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es convexo, entonces $z(w, q)$ es un conjunto convexo. Más aún, si $\{z \geq 0 : f(z) \geq q\}$ es estrictamente convexo, entonces $z(w, q)$ es un único elemento.
- (Lema de Shepard) Si $z(\bar{w}, q)$ consiste en un único elemento, entonces $c(\cdot)$ es diferenciable respecto a w en $\bar{w}$ y $\bigtriangledown_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$.
- Si $z(\cdot)$ es diferenciable en $\bar{w}$, entonces $D_w z(\bar{w}, q) = D_w^2 c(\bar{w}, q)$ es una matriz simétrica y s.d.n., con $D_w z(\bar{w}, q)\bar{w} = 0$.
- Si $f(\cdot)$ es homogénea de grado uno (es decir, exhibe rendimientos constantes a escala), entonces $c(\cdot)$ y $z(\cdot)$ son homogéneas de grado uno en q.
- Si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa en q (en particular, los costos marginales son no-decrecientes en q).

La última propiedad es equivalente a decir que si Y es convexo, $C(\cdot)$ es una función convexa y, por lo tanto, el costo marginal es no-decreciente.

Agregación

A diferencia de la teoría del consumidor, la ausencia de una restricción presupuestaria implica que la oferta individual no está afecta al efecto riqueza. Cuando los precios cambian, hay sólo efecto sustitución a lo largo de la frontera de producción. Así, en contraste con la teoría de demanda agregada, este hecho hace que la teoría de agregación de la oferta sea simple y poderosa.

Suponiendo J unidades de producción y asumiendo que Y_j es no vacío, cerrado y satisface libre disposición, la correspondencia de oferta agregada es la suma de las correspondencias de oferta individuales:

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_i(p) = \{y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_j y_j \text{para algún } y_j \in y_j(p), j = 1, ..., J\}$$

Si y_j es un único valor, sabemos que $Dy_j(p)$ es una matriz simétrica y s.d.p.. Cómo estas propiedades se mantienen bajo la adición, $Dy(p)$ es simétrica y s.d.p.. Esto implica que se cumple la ley de demanda en el agregado. $[p - p'] \cdot [y(p) - y(p') \geq 0]$.

La Proposición 5.E.1. establece un resultado fuerte de agregación para la oferta: el beneficio agregado obtenido por cada unidad de producción maximizando su beneficio separadamente tomando precios como dados es el mismo que el que obtendrían si ellas se coordinaran por un beneficio conjunto.

Prop 5.E.1.: Para todo $p \gg 0$, tenemos:

1. $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p)$
2. $y^*(p) = \sum_j y_j(p)$ $(= \{\sum_j y_j : y_j \in y_j(p)$ para todo $j\}$

Volver a revisar demostración.

Una implicancia de este resultado es que la asignación de producción al nivel q entre las firmas es costo minimizante. Esto permite relacionar la función de oferta agregada de las firmas para el output $q(p)$ con la función de costo agregado de la misma manera que en la sección 5.D. (aspectos geometricos).

Producción Eficiente

Definición 5.F.1.: Un vector de producción $y \in Y$ es eficiente si no hay un $y' \in Y$ tal que $y' \geq y$ con $y' \neq y$.

Prop 5.F.1.: Si $y \in Y$ es maximizador de beneficios para algún $p \gg 0$, entonces y es eficiente.

El resultado es válido también para conjuntos de producción no convexos. Cuando se combina este resultado con los de agregación, se tiene que si un conjunto de firmas escoge de manera independiente maximizar sus beneficios respecto al mismo vector fijo de precios $p \gg 0$, entonces la producción agregada es socialmente eficiente. Esto es, no hay otro plan de producción para la economía que pueda producir más output sin utilizar más input.

La siguiente proposición es una versión del llamado *segundo teorema fundamental del bienestar*.

Prop 5.F.2.: Suponga que Y es convexo. Entonces, toda producción eficiente $y \in Y$ es maximizadora de beneficios para algún vector $p \geq 0$, con $p \neq 0$.

La demostración de esta proposición utiliza el teorema del plano separador de convexos. Recordar que la demostración no puede ser extendida a un vector de precios $p \gg 0$.

3. Decisiones bajo incertidumbre

La unidad básica para el análisis en esta sección son las Loterías, un aparato formal utilizado para representar alternativas de riesgo.

Def 6.B.1: Una lotería simple L es una lista $L = (p_1, \ldots, p_N)$ con $p_n \geq 0$ para todo n y $\sum_n p_n = 1$, donde p_n es interpretado como la probabilidad de que ocurra el resultado n.

En una lotería simple, los resultados que puede ocurrir son ciertos. Una variante de Loterías más general es la Lotería Compuesta, la cual permite que los resultados de una lotería sean por sí mismos una lotería simple.

Def 6.B.2: Dadas K loterías simples $L_k = \left(p_1^k, \ldots, p_N^k\right), k = 1, \ldots, K$, y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_k \alpha_k = 1$, la lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ es la alternativa de riesgo que da la lotería simple L_k con probabilidad α_k para $k = 1, \ldots, K$.

Para cada lotería compuesta podemos calcular la lotería reducida como una lotería simple que genera la misma distribución final sobre resultados. El valor de cada p_n se obtiene multiplicando la probabilidad de que aparezca la lotería K, α_k, por la probabilidad p_n^k que el resultado n aparezca en la lotería L_k, y luego sumar sobre k. Esto es, la probabilidad del resultado n en la lotería reducida es: $p_n = \alpha_1 p_n^1 + \ldots + \alpha_K p_n^K$.

A. Preferencias sobre Loterías

Se asumen preferencias racionales sobre el conjunto $\mathcal{L}$. Además, se añaden dos supuestos sobre sus preferencias: continuidad y axioma de independencia (controversial).

Def 6.B.3: La relación de preferencias $\succeq$ en el espacio de loterías simples $\mathcal{L}$ es continua si para cualquier $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, los conjuntos:

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succsim L''\} \subset [0,1]$$
$$\{\alpha \in [0,1] : L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

son cerrados.

En palabras, continuidad significa que cambio pequeños en probabilidades no afectan la naturaleza del orden entre loterías (al igual que en el análisis bajo certidumbre, las preferencias lexicográficas no lo cumplen). Como en el capítulo 3, el axioma de continuidad implica la existencia de una función de utilidad que representa $\succeq$, una función $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L \succeq L'$ si y sólo si $U(L) \geq U(L')$.

Def 6.B.4: La relación de preferencias $\succeq$ en el espacio de loterías simples $\mathcal{L}$ satisface el axioma de independencia si para todo $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in (0,1)$ tenemos:

$$L \succeq L' \text{ si y sólo si } \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

Esto es, si mezclamos cada lotería con una tercera, entonces el orden de preferencias de las mezclas no depende de la tercera lotería utilizada (es independiente).

Def 6.B.5: La función de utilidad $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene forma de Utilidad Esperada si hay una asignación de números $(u_1, \ldots, u_N)$ para los N resultados tal que para cada lotería simple $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$ tenemos:

$$U(L) = u_1 p_1 + \ldots + u_N p_N$$

Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ con forma de utilidad esperada es llamada una *von Neumann-Morgenstern* (v.N-M) función de utilidad esperada. La expresión $U(L) = \sum_n u_n p_n$ es una forma general de una *función lineal en las probabilidades*.

Prop 6.B.1: Una función de utilidad $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene una forma de utilidad esperada si y sólo si es linear, esto es, si y sólo si satisface la propiedad que

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k)$$

para cualquier K loterías L_k, con $k = 1, \ldots, K$ y probabilidades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) \geq 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$.

La propiedad de utilidad esperada es una propiedad cardinal. La siguiente proposición muestra que la forma de utilidad esperada se preserva sólo bajo transformaciones lineares crecientes.

Prop 6.B.2: Suponga que $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función v.N-M que representa $\succeq$ en $\mathcal{L}$. Entonces, $\widetilde{U} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función v.N-M para $\succeq$ si y sólo si hay escalares $\beta > 0$ y γ tal que $\widetilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ para todo $L \in \mathcal{L}$.

Note que si la relación de preferencias $\succeq$ en $\mathcal{L}$ es representable por una función de utilidad $U(\cdot)$ que tiene forma de utilidad esperada, entonces dado que una función de utilidad lineal es continua, sigue que $\succeq$ es continua en $\mathcal{L}$. Más importante aún, la relación de preferencias $\succeq$ debe también satisfacer el axioma de independencia.

B. Teorema de Utilidad Esperada

El teorema de la utilidad esperada dice que si las preferencias sobre loterías satisfacen continuidad y axioma de independencia, entonces sus preferencias son representables por una función con forma de utilidad esperada.

Prop 6.B.3: (Teorema de Utilidad Esperada) Suponga que la relación de preferencias racional $\succeq$ en el espacio de loterías $\mathcal{L}$ satisface continuidad y el axioma de independencia. Entonces, $\succeq$ admite una representación de utilidad de la forma de utilidad esperada. Esto es, podemos asignar un numero u_n a cada resultado $n = 1, \ldots, N$ de tal manera que para cualesquiera dos loterías $L = (p_1, \ldots, p_N)$ y $L' = (p'_1, \ldots, p'_N)$, tenemos:

$$L \succeq L' \text{ si y sólo si } \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$$

C. Loterías de dinero y aversión al riesgo

La aplicación del teorema de utilidad esperada a resultados definidos por variables continuas nos dice que bajo las condiciones del teorema, hay una asignación de valores de utilidad $u(x)$ a valores no negativos de dinero con la propiedad de que cualquier $F(\cdot)$ puede ser evaluada por una función de utilidad $U(\cdot)$ de la forma

$$U(F) = \int u(x)dF(x)$$

Es importante distinguir entre la función de utilidad $U(\cdot)$, definida en loterías, y la función de utilidad $u(\cdot)$ definida en montos seguros de dinero. Por esta razón, llamaremos $U(\cdot)$ la v.N-M función de utilidad esperada y $u(\cdot)$ la función de utilidad Bernoulli. Para los siguientes análisis se postula que $u(\cdot)$ es creciente y continua.

Aversión al riesgo y su medición

Def 6.C.1: Una persona se considera aversa al riesgo si para alguna lotería $F(\cdot)$, la lotería degenerada que entrega el monto $\int xdF(x)$ con seguridad es al menos tan buena como $F(\cdot)$. Si la persona es siempre indiferente entre ambas, se dice que es neutral al riesgo. Por último, decimos que es estrictamente averso al riesgo si la indiferencia se mantiene sólo cuando las dos loterías son la misma (esto es cuando $F(\cdot)$ es degenerada).

Si las preferencias admiten una representación de utilidad esperada con función de utilidad Bernoulli $u(x)$ sigue directamente de la definición que la persona es aversa al riesgo si y sólo si

$$\int u(x)dF(x) \leq u\left(\int xdF(x)\right) \text{ para todo } F(\cdot)$$

Relacionando lo anterior con la desigualdad de Jensen, tenemos que la aversión al riesgo es equivalente a la concavidad de $u(\cdot)$ y la estricta aversión al riesgo con la estricta concavidad de $u(\cdot)$.

Def 6.C.2: Dada una función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ se definen los siguientes conceptos:
(i) El *equivalente de certeza* de $F(\cdot)$, denotado por $c(F, u)$, es el monto de dinero para el cual el individuo es indiferente entre jugar $F(\cdot)$ y el monto cierto $c(F, u)$; esto es,

$$u(c(F, u)) = \int u(x)dF(x)$$

(ii) Para cualquier monto fijo de dinero x y un número positivo ε, la *probabilidad premium* denotada por $\pi(x, \varepsilon, u)$ es el exceso de probabilidad de ganar sobre igualdad de oportunidades que hagan al individuo indiferente entre el resultado cierto x y un juego entre dos resultados $x + \varepsilon$ y $x - \varepsilon$. Esto es,

$$u(x) = (\frac{1}{2} + \pi(x, \varepsilon, u))u(x + \varepsilon) + (\frac{1}{2} - \pi(x, \varepsilon, u))u(x - \varepsilon)$$

Prop 6.C.1: Suponga un individuo maximizador de utilidad esperada con función de utilidad Bernoulli $u(\cdot)$ en montos de dinero. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:
(i) El individuo es averso al riesgo.
(ii) $u(\cdot)$ es cóncava.
(iii) $c(F, u) \leq \int x dF(x)$ para todo $F(\cdot)$
(iv) $\pi(x, \varepsilon, u) \geq 0$ para todo x, ε.

Medición de aversión al riesgo

Def 6.C.3: Dada una función de utilidad Bernoulli por dinero $u(\cdot)$ (doblemente diferenciable), el *coeficiente Arrow-Pratt de aversión al riesgo absoluta* en x es definido como $r_A(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Prop 6.C.2: Las siguientes relaciones sobre $u_2(\cdot)$ *es más averso al riesgo que* $u_1(\cdot)$ son equivalentes:

- $r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1)$ para todo x.
- Existe una transformación cóncava creciente tal que $u_2(x) = \Phi(u_1(x))$ para todo x ; esto es, $u_2(\cdot)$ es una transformación cóncava de $u_1(\cdot)$. En otras palabras, $u_2(\cdot)$ es "más cóncava"que $u_1(\cdot)$.
- $c(F, u_2) \leq c(F, u_1) \quad \text{para todo} \quad F(\cdot)$.
- $\pi(x, \varepsilon, u_2) \geq \pi(x, \varepsilon, u_1)$ para todo x y ε.
- Siempre que $u_2(\cdot)$ encuentra una lotería $F(\cdot)$ tan buena como un resultado sin riesgo $\bar{x}$, $u_1(\cdot)$ encuentra también $F(\cdot)$ tan bueno como $\bar{x}$. Esto es, $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\bar{x})$ implica $\int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\bar{x})$, para todo $F(\cdot)$ y $\bar{x}$.

Def 6.C.4: La función de utilidad Bernoulli por dinero $u(\cdot)$ exhibe *aversión absoluta al riesgo decreciente* si $r_A(x, u)$ es una función decreciente de x.

Comentario: Los individuos cuyas preferencias satisfacen la aversión absoluta al riesgo decreciente toman más riesgo a medida que se vuelven más ricos. La Proposición 6.C.3. muestra propiedades que son equivalentes respecto a la definición anterior.

Def 6.C.5: Dada una función de utilidad Bernoulli por dinero $u(\cdot)$, el *coeficiente de aversión relativa al riesgo* en x es $r_R(x,u) = -xu''(x)/u'(x)$.

Comentario: La propiedad de *aversión al riesgo relativa no-creciente* dice que el individuo se vuelve menos averso al riesgo en cuanto a los juegos que son proporcionales a su riqueza a medida que su riqueza aumenta. Es un supuesto más fuerte que la aversión absoluta al riesgo decreciente.

D. Comparación de distribuciones de pagos en términos de Retorno y Riesgo

El análisis en esta sección se restringe a distribuciones $F(\cdot)$ tales que $F(0) = 0$ y $F(x) = 1$ para algún x.

Dominancia Estocástica de Primer Orden

Def 6.D.1: La distribución $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a $G(\cdot)$ si, para toda función no-decreciente $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

Prop 6.D.1: La distribución de pagos monetarios $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a la distribución $G(\cdot)$ si y sólo si $F(x) \leq G(x)$ para todo x.

Dominancia Estocástica de Segundo Orden

La FOSD envuelve la idea de "más grande/mejor" vs. "más pequeño/peor". La siguiente definición es útil para medir riesgo relativo o dispersión. Observación: los análisis que siguen asumen distribuciones con la misma media, para evitar confusiones.

Def 6.D.2: Para cualesquiera dos distribuciones $F(x)$ y $G(x)$ con la misma media, $F(\cdot)$ domina estocásticamente en segundo orden (o es menor riesgosa que) $G(\cdot)$ si para toda función cóncava no-decreciente $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x) \tag{1}$$

Microeconomía II

1. Existencia de Equilibrio Walrasiano

Teorema. Suponga que las funciones de utilidad son continuas, estrictamente cuasicóncavas y no tienen máximos locales en $\mathbb{R}^n_+$. Además, $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$. Si alguna de las siguientes condiciones es satisfecha:

(a) Las asignaciones iniciales $w^i \gg 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$
(b) La función de utilidad de cada individuo es estrictamente creciente.

Entonces existe (al menos) un equilibrio Walrasiano.

Primer Teorema del Bienestar Social

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son racionales y localmente no-saciables.

Además, asuma que $\sum_{i=1}^m w^i \gg 0$, donde $w^i \in \mathbb{R}^n_+$ es la asignación inicial de recursos del individuo $i \in \{1, \ldots, m\}$ Entonces,

$$\left[\left(\bar{p}; \left(\bar{x}^i\right)_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) \text{EW}\right] \Longrightarrow \left[\left(\bar{x}^i\right)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \text{PE}\right]$$

.

Segundo Teorema del Bienestar Social

Considere una economía de intercambio con m consumidores y n mercancías. Suponga que las mercancías son perfectamente divisibles y que las preferencias de cada individuo son racionales, continuas, convexas y estrictamente monótonas.

Entonces,

$$\left[\left(\bar{x}^i\right)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \gg 0 \text{ PE}\right] \Longrightarrow \exists\, \bar{p} \in \mathbb{R}^n_+ : [\left(\bar{p}; \left(\bar{x}^i\right)_{i\in\{1,\ldots,m\}}\right) \text{ es un EWT}]$$

Teoremas Instrumentales

Teorema del Punto Fijo de Kakutani

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y diferente de vacío. Si $\Gamma : K \twoheadrightarrow K$ es hemicontinua superior y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío, entonces existe $\bar{x} \in K$ tal que $\bar{x} \in \Gamma(\bar{x})$.

Teorema del Máximo de Berge

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$. Dada una función $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ y una correspondencia $\Gamma : Y \twoheadrightarrow X$, defina $v(y) = \text{máx}_{x\in\Gamma(y)} f(x,y)$ y $\Omega(y) = \text{argmax}_{x\in\Gamma(y)} f(x,y)$.
Suponga que f y Γ son continuas. Además, asuma que Γ tiene valores compactos y diferentes de vacío. Entonces, v es continua y Ω es hemicontinua superior con valores compactos diferentes de vacío.

Corolario: Bajo las condiciones del Teorema del Máximo de Berge, asuma que Γ tiene valores convexos. Si f es cuasicóncava en la variable x, Ω tiene valores convexos. Si f es estrictamente cuasicóncava en la variable x, Ω es una funcíon continua.

Teorema de Existencia de Equilibrio en Juegos Sociales

Dado $\mathcal{S}\left(I, (u^i, S^i, \Gamma^i)_{i\in I}\right)$, suponga que los espacios de estrategias $\{s^i\}_{i\in I}$ son convexos, compactos y diferentes de vacío. Además, asuma que las funciones objetivo $\{u^i\}_{i\in I}$ son continuas y cuasicóncavas en la propia estrategia. Si las correspondencias de estrategias admisibles $\{\Gamma^i\}_{i\in I}$ son continuas y tienen valores compactos, convexos y diferentes de vacío, entonces existe un equilibrio para $\mathcal{S}\left(I, (u^i, S^i, \Gamma^i)_{i\in I}\right)$.

2. Mercados financieros incompletos

Los activos financieros son contratos que le permiten a los individuos endeudarse o invertir para suavizar su consumo a través del tiempo. Cuando los mercados financieros son completos todo irá por buen camino: **existencia, eficiencia y estabilidad social de equilibrio**.

En el contexto de mercados financieros incompletos (MFI) se tiene que:

- En el caso de una única única mercancía siempre hay equilibrio. Para esto, es clave que no existan restricciones financieras.
- Con Activos Nominales existe equilibrio pero puede no ser Pareto Eficiente. De hecho, la probabilidad de que los equilibrios sean P.E. es cero. Para este resultado es clave asumir que los vectores $R_j = (R_{s,j})_{s\in 1,\dots,S}$ son linealmente independientes, lo que permite encontrar una submatriz $\hat{R}$ que sea invertible y así compactificar el espacio de los posibles z_j^i.
- La no existencia de oportunidades de arbitraje es una condición necesaria para la existencia de un óptimo individual. Si no hay oportunidades de arbitraje, entonces existe $(\lambda_s)_{s\in 1,\dots,S} \gg 0$ tal que $q_j = \sum_{s=1}^{S} \lambda_S R_{s,j}(p)$

- Para asegurar la existencia de equilibrio con activos reales es necesario restringir la deuda: (i) límites exógenos a la deuda, (ii) límites endógenos más utilidades ilimitadas, (iii) garantías subsidiarias (colateral)

- En mercados incompletos, las decisiones de producción dependerán de las preferencias de los controladores. Para incluir la producción en el modelo con mercados incompletos se deben hacer hipótesis adicionales: toma la decisión el accionista mayoritario, reglas de votación corporativa, financiamiento que depende de los planes de producción.

- La innovación financiera (añadir activos faltantes para completar mercados) podría no solucionar los problemas de mercados incompletos e incluiso empeorar la situación ya que cambia los precios relativos.

3. Elección Social

El análisis considera al menos dos individuos, $\#N \geq 2$, y al menos tres alternativas, $M \geq 3$. Cada individuo es caracterizado por una **preferencia estricta** que es completa y transitiva. Denotaremos por $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los perfiles de preferencias $P = (\succ_n)_{n \in N}$ que cumplen las hipótesis antes descritas.

Una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$ asocia a cada perfil de preferencias $(\succ_n)_{n \in N}$ una alternativa socialmente factible $f\left((\succ_n)_{n \in N}\right)$.

Una funcional de bienestar social $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ asocia a cada perfil de preferencias $(\succ_n)_{n \in N}$ una preferencia social $R\left((\succ_n)_{n \in N}\right)$, donde $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}^*)^N$.

Algunas propiedades naturales que podemos exigir son:

Unanimidad: Un funcional de bienestar social $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ cumple la propiedad de unanimidad si para todo perfil de preferencias $P = (\succ_n)_{n \in N} \in \mathcal{P}$ tal que $a_i \succ_n a_j$ para todo $n \in N$, tenemos que $a_i R(P) a_j$.

Independencia de alternativas irrelevantes: Un funcional $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ cumple la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes si dados perfiles de preferencias $P, P' \in \mathcal{P}$ que coinciden sobre $\{a_i, a_j\}$, tenemos que $a_i R(P) a_j$ si y sólo si $a_i R(P') a_j$.

Teorema de Imposibilidad de Arrow

Sea $R : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^*$ un funcional de bienestar social que cumple la propiedades de unanimidad e independencia de alternativas irrelevantes.

Entonces, existe un individuo $h \in N$ tal que, $a_i \succ_h a_j$ implica que $a_i R(P) a_j$ para todo $a_i, a_j \in A$, para todo $P \in \mathcal{P}$.

Strategy Proof

Dados perfiles de preferencias $P = (\succ_n)_{n \in N}$ y $P' = (\succ'_n)_{n \in N}$, denotaremos por (P'_n, P_{-n}) al perfil que se obtiene a partir de P cambiando la preferencia de individuo n para $\succ'_n$.

Una regla de elección social $f : \mathcal{P} \to A$ es **strategy-proof** si para todo par de perfiles de preferencia $P, P' \in \mathcal{P}$ tenemos que

$$f(P'_n, P_{-n}) \neq f(P) \quad \Longrightarrow \quad f(P) \succ_n f(P'_n, P_{-n})$$

.

Teorema de Imposibilidad de Gibbard-Satterthwaite

Sea $f : \mathcal{P} \rightarrow A$ una regla de elección social strategy-proof tal que $f(\mathcal{P}) = A$. Entonces, existe un individuo $h \in N$ tal que, para todo $P = (\succ_n)_{n \in N} \in \mathcal{P}$ tenemos que $f(P) \succ_h a, \forall a \neq f(P)$.

Teorema de May

En una elección con dos candidatos y un número impar de votantes, la mayoría simple es único proceso de decisión que produce siempre un vencedor y que satisface:

- anonimato: todos los votantes son tratados por igual;
- neutralidad: todos los candidatos son tratados por igual;
- monotonicidad: si un único votante cambiase su voto por el candidato perdedor al candidato ganador, el resultado de la elección sería el mismo

Propiedades

Monotonía Condorcet

Diremos que una regla de elección social f es Condorcet monótona si dados perfiles de preferencias $P, P' \in \mathcal{P}$ que coinciden sobre las alternativas $\{a_i, a_j\}$ las cuales son top bajo P', tenemos que $[f(P) = a_i] \Longrightarrow [f(P') = a_i]$.

4. Diseño de Mecanismos

Una regla de elección social es una correspondencia $f : \Theta \to A$ que asocia a cada perfil de tipos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ un conjunto de alternativas socialmente factibles $f(\theta) \subseteq A$.

Ejemplos de reglas de elección social (SCR)

Pareto eficiente: Asocia a cada perfil θ las asignaciones:

$$f(\theta) = \{a \in A : a \text{ no puede ser Pareto dominada bajo } \{R_i(\theta_i)\}_{i=1}^n\}$$

Observación: creo que lo anterior es lo mismo que la siguiente definición;

$$f^{\mathrm{PO}}(\boldsymbol{R}) = \{a | \text{ for all } b \in A \text{ there exists } i \text{ such that } aR, b\}$$

Dictatorial: Asocia a cada perfil θ asignaciones que son óptimas para el individuo:

$$f(\theta) \subseteq \{a \in A : aR_i(\theta_i)\, b, \forall b \in A\}$$

Hay otros ejemplos en la sección final de diseño de mecanismos.

Mecanismos

Un mecanismo es un juego. Su idea fundamental: revelación de información a través de las decisiones estratégicas. Si el planificador conoce $(g, S_1, \ldots, S_n)$, pueden calcular los equilibrios $(s_1^*(\theta), \ldots, s_n^*(\theta))$ e inferir los tipos θ a partir de ello.

Implementación

Dado un mecanismo $\Gamma = (S_1, \ldots, S_n, g)$, denote por $E_g(\theta)$ el conjunto de equilibrios en el estado θ.

Denote por $g(E_g(\theta)) := \{g(s^*(\theta)) \in A : s^*(\theta) \in E_g(\theta)\}$ el conjunto de alternativas socialmente factibles que son implementadas por el mecanismo Γ en el estado θ.

El mecanismo Γ **implementa** la regla de elección social $f : \Theta \to A$ si para cada $\theta \in \Theta$ tenemos que $E_g(\theta) \neq \emptyset$ y $g(E_g(\theta)) \subseteq f(\theta)$.

El mecanismo Γ **implementa totalmente** la regla f si para cada $\theta \in \Theta$ tenemos que $E_g(\theta) \neq \emptyset$ y $g\left(E_g(\theta)\right) = f(\theta)$.

Un mecanismo $\Gamma = (g, S_1, \ldots, S_n)$ es **directo** cuando $S_i = \Theta_i, \forall i$.

Un mecanismo directo Γ_d **implementa de forma veraz la regla** $f : \Theta \to A$ si para cada $\theta \in \Theta$ tenemos que $\theta \in E_g(\theta)$ y $g(\theta) \in f(\theta)$.

Implementación en Estrategias Dominantes

Una regla de elección social $f : \Theta \to A$ es **implementable de forma veraz en estrategias dominantes** si existe un mecanismo directo $\Gamma_d = (g, \Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ tal que:

(i) Decir la verdad es una estrategia dominante, i.e. para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\theta_i \in \Theta_i$:

$$g\left(\theta_i, \hat{\theta}_{-i}\right) R_i\left(\theta_i\right) g\left(\hat{\theta}_i, \hat{\theta}_{-i}\right), \quad \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i, \forall \hat{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}$$

(ii) Para cada $\theta \in \Theta, g(\theta) \in f(\theta)$.

Comentario: Esto nos dice que hay un equilibro en que nadie miente y el resultado está dentro de lo factible. Cuando se permiten relaciones de indiferencia podría haber muchos equilibrios en estrategias dominantes.

Principio de Revelación

Si la regla de elección social es implementable en estrategias dominantes, entonces es implementable de forma veraz en estrategias dominantes.

Comentario: la importancia teórica del Principio de Revelación radica en que concede al diseñador la facultad de restringirse sólo a mecanismos directos, cuyo conjunto de juegos y equilibrios posibles es relativamente más reducido.

Condiciones Necesarias y Suficientes para Implementación en Estrategias Dominantes

Teorema 1: Suponga que $\mathcal{R}$ contiene solamente relaciones estrictas de preferencia. Si una regla de elección social es implementable de forma veraz en estrategias dominantes, entonces es implementable en estrategias dominantes.

Teorema 2: Suponga que $\mathcal{R}$ contiene solamente relaciones estrictas de preferencia. Una regla de elección social es **totalmente implementable** en estrategias dominantes si y sólo si es univaluada e implementable de forma veraz en estrategias dominantes.

Imposibilidad de Implementación en Estrategias Dominantes
El teorema de Gibbard-Satterthwaite muestra que si $f(\Theta) = A$ y $\#A \geq 3$, entonces f es

implementable de forma veraz en estrategias dominantes *si y solamente* si es dictatorial.

Implementación en Estrategias Dominantes con Preferencias Cuasi-Lineales

Al asumir que los individuos tienen preferencias cuasi-lineales se restringe el dominio de f.

Dada una regla de elección social $f : \Theta \to \{0,1\} \times \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta))$$

diremos que:

- f es factible cuando $\sum_i t_i(\theta) \leq 0, \forall \theta \in \Theta$
- f es presupuestariamente balanceada cuando $\sum_i t_i(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in \Theta$
- f es existosa cuando $x(\theta) = 1$ si y solamente si $\sum_i \theta_i \geq 0$
- f es ex-post eficiente si es existosa y presupuestariamente balanceada.

Mecanismos de Groves

Un mecanismo de Groves $\Gamma_G = (\Theta, f)$ es un mecanismo directo caracterizado por

$$f(\theta) = (x(\theta), t_1(\theta), \ldots, t_n(\theta))$$

donde

$$x(\hat{\theta}) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \sum_i \hat{\theta}_i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe una función $h_i : \Theta_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$t_i(\hat{\theta}) = \begin{cases} h_i\left(\hat{\theta}_{-i}\right) + \sum_{j \neq i} \hat{\theta}_j & \text{cuando } \sum_i \hat{\theta}_i \geq 0 \\ h_i\left(\hat{\theta}_{-i}\right) & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Teorema (Groves, 1973)
En un mecanismo de Groves decir la verdad es una estrategia dominante.

Así, el mecanismo de Groves implementa de forma veraz en estrategias dominantes una regla de elección social existosa.

Teorema (Green y Laffont, 1977)
Sea Γ_d un mecanismo directo que implementa de forma veraz en estrategias dominantes una regla de elección social exitosa. Entonces, Γ_d es un mecanismo de Groves.

Mecanismo de Clark

Un mecanismo de Clarke $\Gamma_C = (\Theta, f)$ es un mecanismo de Groves donde para cada individuo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$h_i\left(\hat{\theta}_{-i}\right) = \text{mín}\left\{-\sum_{j\neq i}\hat{\theta}_j, 0\right\}$$

Así, las transferencias de cada individuo serán negativas o cero. Una persona deberá compensar otras si su preferencia reportada hace cambiar la decisión que se hubiese tomado sin ella. Algunos resultados respecto al Mecanismo de Clark son:

Teorema
El mecanismo de Clarke no es presupuestariamente balanceado.

Teorema
No existe un mecanismo de Groves factible cuyas transferencias agregadas sean dominadas por las transferencias que implementa el mecanismo de Clarke.

Comentario: en otras palabras, es el que menos pierde recursos.

Corolario
No existen reglas de elección social ex-post eficientes que sean implementables de forma veraz en estrategias dominantes. Sin embargo, existen reglas de elección social existosas, factibles e implementables de forma veraz en estrategias dominantes.

Al permitir un modelo con **participación voluntaria**, lo mínimo que se require de un mecanismo directo y veraz es que, al revelar su tipo, los individuos no se arrepientan de haber participado. Llamaremos a una decisión **ex-post racional** si $\theta_i x(\theta) + t_i(\theta) \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Al respecto, se tiene que:

Teorema
No existen reglas de elección social que sean exitosas, factibles, implementables de forma veraz en estrategias dominantes y ex-post individualmente racionales.

Implementación vía Equilibrio de Nash

Sabemos que muy pocas reglas de elección social son implementables en estrategias dominantes. Cuando no se restringen los espacios de preferencias, solamente las reglas de elección social dictatoriales son implementables. Cuando las preferencias son cuasi-lineales, no existen reglas de elección social que sean ex-post eficientes e implementables de forma veraz en estrategias dominantes (i.e., compatibles con incentivos).

Por eso, un paso natural es reducir los requisitos de compatiblidad de incentivos que impone el concepto de equilibrio en estrategias dominantes. Nos enfocaremos en la implementación de reglas de elección social como equilibrios de Nash de algún mecanismo.

Una regla de elección social $f : \Theta \to A$ es **implementable de forma veraz en estrategias Nash** o **compatible con incentivos** si existe un mecanismo directo $\Gamma_d = (g, \Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ tal que:

(i) Decir la verdad es una respuesta óptima a la decisión de los otros individuos de decir la verdad, i.e. para cada $i \in \{1, \ldots, n\}, \theta_i \in \Theta_i, \theta_{-i} \in \Theta_{-i}$:

$$g\left(\theta_i, \theta_{-i}\right) R_i\left(\theta_i\right) g\left(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}\right), \quad \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_i$$

(ii) Para cada $\theta \in \Theta, g(\theta) \in f(\theta)$

De inmediato, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema
Un regla de elección social es implementable de forma veraz en estrategias Nash si y solamente si es implementable de forma veraz en estrategias dominantes.

Comentario: lo anterior se debe a que la verdad de los otros individuos puede ser "cualquier cosa". Así, la implementación en estrategias Nash se reduce a reglas dictatoriales.

Si expandimos el espacio de estrategias individuales para Θ, entonces no necesariamente una regla de elección social que es implementable de forma veraz en estrategias Nash será compatible con incentivos en estrategias dominantes.

En este último contexo, toda regla de elección social $f : \Theta \to A$ es implementable de forma veraz en estrategias No obstante, esto rara vez lleva a la implementación de la regla.

Monotonía Maskin

Una regla de elección social $f : \Theta \to A$ es monótona si para cada $\theta, \theta' \in \Theta$ tenemos que:

$$a \in f(\theta) \wedge \left(\forall i : L_i(a, \theta) \subseteq L_i\left(a, \theta'\right)\right) \Longrightarrow a \in f\left(\theta'\right)$$

donde $L_i(a, \theta) := \{z \in A : aR_i\left(\theta_i\right) z\}$.

Teorema (Maskin, 1977)
Si una regla de elección social $f : \Theta \to A$ es totalmente implementable en estrategias Nash entonces es monótona.

Comentario: la monotonía Maskin es entonces una condición necesaria para la implementación en estrategias Nash. Nótese además que no hablamos de mecanismos directos.

Algunas SCR, continuación

Regla de elección Paretiana

$$f^P : \Theta \twoheadrightarrow A \text{ tal que}$$

$a \in f^P(\theta) \iff \nexists\, b \in A$ tal que $bR_i(\theta)a \;\; \forall i \in 1, \ldots, n$ y $\exists j \in 1, \ldots, n$ tal que $bP_i(\theta)a$

Esto es, no existe una alternativa b que para todos sea al menos tan buena cuanto a y para al menos un individuo sea estrictamente mejor que a.

Esta SCR no es necesariamente Maskin Monótona. La monotonía Maskin de la regla de elección social Paretiana se puede asegurar cuando las preferencias individuales son siempre continuas y monótonas.

Regla de elección débilmente Paretiana

$$f^{DP} : \Theta \twoheadrightarrow A \text{ tal que}$$

$a \in f^{DP}(\theta) \iff \nexists\, b \in A$ tal que $bP_i(\theta)a \;\; \forall i \in 1, \ldots, n$

Esta regla escoge una alternativa a tal que no existe otra alternativa b que para todos sea mejor que a.

Esta SCR es Maskin Monótona.

No poder de veto

Dada una regla de elección social $f : \Theta \to A$, no hay poder de veto si la siguiente propiedad es satisfecha:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall a \in A : \quad (aR_j\,(\theta_j)\,z, \forall j \neq i, \forall z \in A) \Longrightarrow a \in f(\theta)$$

Teorema (Maskin, 1977)
Suponga que $n \geq 3$. Suponga que la regla de elección social $f : \Theta \twoheadrightarrow A$ es monótona y no hay poder de veto, entonces f es **totalmente implementable en estrategias Nash**.

5. Teoría de Emparejamientos

Un emparejamiento es una función

$$\mu : M \cup W \to M \cup W$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} m_i = \mu\left(w_j\right) &\iff w_j = \mu\left(m_i\right) \\ m_k = \mu\left(m_i\right) &\iff k = i \\ w_s = \mu\left(w_j\right) &\iff s = j \end{aligned}$$

Emparejamientos Bilaterales

Definiciones

Un emparejamiento μ puede ser bloqueado por un agente si existe $h \in M \cup W$ que prefiere estar solo a ser emparejado con $\mu(h)$. Un emparejamiento es *individualmente racional* si no puede ser bloqueado por ningún individuo.

Un emparejamiento μ puede ser bloqueado por un par de individuos (m_i, w_j) cuando $m_i \neq \mu\left(w_j\right)$ y ambos individuos prefieren estar juntos a ser emparejados con los individuos determinados por μ.

Un emparejamiento μ es **estable** si no puede ser bloqueado por ningún individuo ni por un par de individuos.

Un emparejamiento μ está en el **núcleo** si no existe ninguna coalición de individuos en $M \cup W$ que pueden emparejarse entre si y generar una asignación Pareto superior (para la coalición). *Comentario: pueden existir emparejamientos estables que no estén en el núcleo.*

Teoremas

Teorema 1 (Gale y Shapley, 1962)
El conjunto de emparejamientos estables es diferente de vacío. Además, siempre se puede obtener un emparejamiento estable siguiendo el algoritmo de aceptación diferida.

Teorema 2 (Gale y Shapley, 1962)
Suponga que se utiliza el algoritmo de aceptación diferida. Si los individuos en M hacen las propuestas, entonces el emparejamiento M-óptimo es implementado. Análogamente, el emparejamiento W-óptimo es implementado cuando los individuos en W hacen las propuestas.

Teorema 3 (Knuth, 1976)
Si μ y μ' son emparejamientos estables, $\mu \succeq_M \mu'$ si y solo si $\mu' \succeq_W \mu$.

Teorema 4 (Roth y Sotomayor, 1990)
El núcleo del mercado bilateral uno-a-uno coincide con el conjunto de emparejamientos estables. **En particular, todo emparejamiento estable es Pareto eficiente.**

Teorema 5 (Gale y Sotomayor, 1985)
En un emparejamiento estable el conjunto de individuos que quedan solos es siempre el mismo.

Teorema 6 (Gale y Sotomayor, 1985)
Cuando un nuevo individuo m (respectivamente, un nuevo individuo w) entra al mercado, ningún agente en W (respectivamente, M) está peor si se implementa μ_M o μ_W.

Teorema 7 (Roth, 1982; Gale and Sotomayor , 1985)
Para los individuos en M (resp., en W), el emparejamiento μ_M (resp., μ_W) es débilmente Pareto óptimo en el conjunto de emparejamientos individualmente racionales.

Asuma que en un mercado bilateral uno-a-uno caracterizado por $(M; W; (R(z))_{z\in M\cup W})$, los individuos informan preferencias $R' = (R'(z))_{z\in M\cup W})$ a un planificador central que implementa un emparejamiento $\Phi(R')$. Si para todo R' el emparejamiento $\Phi(R')$ es estable, diremos que Φ es un **mecanismo de emparejamiento centralizado estable.**

Teorema 8 (Roth, 1982)
No existe ningún mecanismo de emparejamiento centralizado estable en el cual reportar las verdaderas preferencias sea una estrategia dominante para cada individuo.

Dado un mercado bilateral uno-a-uno $(M, W, (R(z))_{z\in M\cup W})$ y $S \in \{M, W\}$, diremos que un mecanismo centralizado estable Φ es compatible con incentivos para los individuos en S si no existe ningún conjunto $S' \subseteq S$ que tenga incentivos a reportar preferencias falsas dado que los otros individuos están reportando sus verdaderas preferencias.

Teorema 9 (Dubins y Freedman, 1981)
Dado un mercado bilateral uno-a-uno $(M, W, (R(z))_{z\in M\cup W})$ y $S \in \{M, W\}$, todo mecanismo centralizado estable Φ tal que $\Phi(R) = \mu_S$ es compatible con incentivos para los individuos en S.

Emparejamientos Bilaterales Muchos a Uno

Teorema
Un emparejamiento en el modelo muchos-a-uno es estable si y solamente si el emparejamiento asociado en el modelo uno-a-uno inducido es estable.

Algunas propiedades que son consecuencia directa de los resultados obtenidos para emparejamientos uno-a-uno:

- El algoritmo de aceptación diferida aplicado al modelo uno-a-uno inducido por replicación genera emparejamientos estables en el modelo muchos-a-uno.

- Para el grupo que hace las propuestas, el emparejamiento que se obtiene por el algoritmo de aceptación diferida es óptimo entre los emparejamientos estables. *Comentario: En el caso de las instituciones, se tiene que el emparejamiento es óptimo para los representantes y no necesariamente para la institución.*

- El conjunto de estudiantes que consiguen un cupo en una universidad y el número de vacantes que cada universidad llena coinciden en todos los emparejamientos estables.

Teorema del Hospital Rural (Roth, 1986)
Cada hospital que no cubre sus cupos en un emparejamiento estable, mantendrá el mismo número de vacantes en cualquier otro emparejamiento estable.

Definición (Responsive Preferences)
Cada $m \in M$ tiene preferencias sobre los subconjuntos de W tales que, para cada $S \subseteq W$ con $\#S < q_m$, dados w_j y w_k que no están en S, m prefiere $S \cup \{w_j\}$ a $S \cup \{w_k\}$ si y solamente si $w_j P^m w_k, y$ prefiere $S \cup \{w_j\}$ a S si y solamente si w_j es aceptable para m.

Un matching μ **puede ser bloqueado por una coalición** $A \subseteq M \cup W$ si existe otro emparejamiento μ' tal que para todo $m, w \in A$ tenemos que:
(i) $\mu'(w) \in A$ y $\mu'(w)P^w\mu(w)$.
(ii) $\tilde{w} \in \mu'(m) \Longrightarrow \tilde{w} \in A \cup \mu(m)$.
(iii) $\mu'(m)P^m\mu(m)$.

Un emparejamiento μ es estable a desvíos grupales si no puede ser bloquead por ningluna coalición.

Teorema
Un emparejamiento es estable si y solamente es estable a desvíos grupales.

Comentario: a diferencia del emparejamiento bilateral uno a uno, no se cumple necesariamente que el núcleo coincide con el conjunto de emparejamientos estables. Lo anterior sí ocurrirá cuando se cumpla la propiedad de Responsive Preferences.

Teorema (Roth, 1989)
El emparejamiento estable $W-$*óptimo* es debilmente Pareto óptimo para los estudiantes. Sin embargo, el emparejamiento $M - optimo$ no necesariamente es (débilmente) Pareto óptimo para las universidades.

Comentario: recordar que débilmente Pareto es una mejora para todos. Por eso, en un emparejamiento M-óptimo los representantes no pueden mejorar todos, pero aun cuando sólo uno mejore la institución mejoraría.

Problema de Elección de Colegios

Estudiamos tres mecanismos: Boston, W-óptimo de Gale-Shapley y TTC.
Propiedades

- El mecanismo de Boston es inestable, incompatible con incentivos y Pareto ineficiente.
- El mecanismo W-óptimo de Gale-Shapley es estable y compatible con incentivos. Sin embargo, es Pareto ineficiente (no pueden mejorar todos pero si algunos).
- El mecanismo TTC es Pareto eficiente y compatible con incentivos. Sin embargo, es inestable.

Emparejamientos Unilaterales

La teoría de emparejamientos unilaterales se enfoca en la asignación de bienes indivisibles entre individuos. En este contexto, un emparejamiento es una función que asocia a cada agente a lo más un objeto.

Estudiamos tres modelos de emparejamiento unilateral:

- El mercado habitacional de Shapley y Scarf (JME, 1974).
- Problemas de asignación habitacional. (Hylland y Zeckhauser (JPE, 1979); Addulkadiroglu y Sonmez (JET, 1999))
- Emparejamiento paciente-donante para trasplante de riñón. (Roth, Sonmez y Unver (QJE, 2004))

El mercado habitacional de Shapley y Scarf

Se analiza una situación con N individuos, cada uno de los cuales es *propietario* de una y solamente una casa. El algoritmo que se utiliza es un TTC donde cada ciclo está compuesto solamente por personas que indican la casa de la persona que les gustaría recibir.

Teorema (Shapley y Scarf, 1974; Roth y Postlewaite, 1977; Roth, 1982)
El mecanismo TTC implementa el único emparejamiento en el núcleo del mercado habitacional. Además, el mecanismo TTC es compatible con incentivos y puede ser implementado como la única asignación de casas de un mercado competitivo.

Problemas de asignación habitacional

A diferencia del mercado habitacional de Shapley y Scarf los individuos no son propietarios de las casas. En este contexto, consideramos los siguientes mecanismos:

1. Serial dictatorship (SD): Este mecanismo es Pareto eficiente y compatible con incentivos. Notar además que, como los individuos no son inicialmente propietarios de las casas, los conceptos de núcleo y racionalidad individual dejan de ser relevantes.

Considerando un contexto más general, donde hay un conjunto de propietarios, un conjunto de entrantes, un conjunto de casas ocupadas, un conjunto de casas vacías y preferencias estrictas de cada agente por las casas. Si no hay entrantes, recuperamos el modelo de Shapley y Scarf (1974) y TTC implementa un emparejamiento en el núcleo que es compatible con incentivos. Si no hay propietarios, SD implementa un emparejamiento Pareto eficiente y compatible con incentivos. Para otros casos se tienen dos opciones:

- **2.** Determinar una distribución inicial μ sobre las casas y aplicar TTC.
- **3.** Entre los individuos que quieran participar, determinar un orden y aplicar SD (Random Serial Dictatorship (RSD)).

Como tanto la distribución inicial de las casas como el orden del SD, pueden seguir una distribución aleatoria, se definen los siguientes conceptos: Un mecanismo es (1) Ex-post Pareto eficiente si da probabilidad positiva solamente a emparejamientos Pareto eficientes y (2) Individualmente racional si da probabilidad positiva solamente a emparejamientos donde los propietarios reciben una casa tan buena cuanto la que tenían. **Se puede probar que ambos caminos llevan al mismo resultado.**

Aunque el RSD es utilizado para asignar estudiantes a dormitorios universitarios, este mecanismo **no** es ex-post Pareto eficiente ni individualmente racional.

Para solucionar el problema anterior, Abdulkadiroglu y Sonmez (1999) propusieron el mecanismo **4. You request my house—I get your turn (YRMH-IGYT)**. Al respetar los derechos de propiedad, el mecanismo consigue implementar emparejamientos ex-post Pareto eficientes e individualmente racionales. Además, es compatible con incentivos.

Problema de Transplante de Riñones

Roth, Sonmez y Unver (2004) propusieron un mecanismo de emparejamiento, Top Trading Cycles and Chains (TTCC), que permite la reasignación de órganos entre pares paciente-donador no compatibles. El algoritmo es el siguiente:

Primero, se define una **cadena** como una lista ordenada de pacientes $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_k})$, cada uno anunciando al siguiente paciente de la lista, excepto el paciente m_{ik} que pide para entrar en la lista de espera. Luego,

(1) Cada paciente anuncia al paciente del par paciente-donador cuyo donador él prefiere. Puede anunciarse a si mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera. Se forma un ciclo, una cadena o ambos.

(2.1) Si hay ciclos, se implementa el intercambio de órganos entre los pacientes del ciclo. Cada paciente que queda anuncia al paciente del par paciente-donador cuyo donador él prefiere y que aún está disponible. Puede anunciarse a si mismo o solicitar el ingreso a la lista de espera. Si hay ciclos, se implementa el intercambio y se repite el proceso hasta que no aparecen más ciclos.

(2.2) Si no hay ciclos y aún quedan pares paciente-donador, entonces cada paciente está en una cadena. Utilizando una regla de selección de cadenas, se selecciona una de las cadenas existentes y se implementan las donaciones asociadas, incluyendo el ingreso del último paciente de la cadena en la lista de espera.

La regla de selección de cadenas determinará si el órgano del donante asociado al primer paciente de la cadena va directo a la lista de espera o continua en el algoritmo. Si se opta por mantener el órgano en el algoritmo, el primer paciente de la cadena comienza a hacer anuncios virtuales.

(3) Luego de la eliminación de una cadena se pueden formar nuevos ciclos!! Se repiten las etapas (2.1) y (2.2) hasta que no queden pacientes.

El intercambio implementado por el mecanismo TTCC es Pareto eficiente si, en toda etapa no-terminal del algoritmo, el donante que queda disponible luego de la eliminación de una cadena no va a la lista de espera.

Kidney Exchange (Roth, Sönmez, Ünver(2004)).

En el contexto de la asignación de casas con los inquilinos existentes, también hay recién llegados, ninguno de los cuales es propietario de una casa específica, y casas vacantes, ninguna de las cuales es propiedad de un estudiante específico. La contraparte de los recién llegados son pacientes que no tienen donantes vivos, y la contraparte de las casas vacantes son riñones de cadáveres que no están destinados a pacientes específicos.

Esta analogía revela una importante diferencia entre los dos modelos: en el modelo de asignación de casas, se conoce el conjunto de casas vacías. En el problema de intercambio de riñones, no está claro qué riñones cadavéricos estarán disponibles, cuándo estarán disponibles, etc. Por lo tanto, mientras que las casas ocupadas y las casas vacantes se asignan simultáneamente bajo el mecanismo YRMH-IGYT, esto no es posible en el contexto del intercambio de riñones. En cambio, los pacientes con donantes vivos a los que no se les asigna un riñón de un donante vivo serán asignados a la cola de cadáveres (con una prioridad que refleja si el riñón de su donante fue donado a alguien en la cola).

En lo que sigue, consideraremos que todas las preferencias son estrictas. Si sólo se consideran los intercambios directos entre pares donante-receptor, se puede utilizar directamente el mecanismo de Gale Top Trading Cycles. Sin embargo, esto no permite donaciones indirectas.

Como el suministro de determinados riñones de donantes cadavéricos no es previsible, un paciente que desee cambiar el riñón de su donante a cambio de una prioridad en la lista de espera de riñones cadavéricos está recibiendo una lotería. Teniendo esto en cuenta, el paciente, el médico y el donante pueden decidir si esta opción es aceptable y, en caso afirmativo, dónde se sitúa en las preferencias del paciente.

Se definen las preferencias P_i de cada paciente t_i sobre $K_i \subset K = k_1, \ldots, k_n \cup k_i, w$, donde w es la opción de entrar a la lista de espera. Si k_i está en el top, el par paciente-donador no entran al intercambio. Si, k_i no está en el top pero es preferido a w, el paciente no irá a lista de espera.

Comentarios al algoritmo TTCC:
weEn una cadena $(k'_1, t'_1, \ldots, k'_k, t'_k)$, el paciente t'_k recibe alta prioridad para el siguiente riñón compatible en la lista de espera cadavérica, y el riñón k'_1 se ofrece ya sea a la lista de espera cadavérica o a otro paciente con un donante emparejado.

LEMA 1. Considere un gráfico en el que tanto el paciente como el riñón de cada par son nodos distintos como lo es la opción w de la lista de espera. Suponga que cada paciente apunta hacia un riñón o w, y cada riñón apunta a su receptor emparejado. Entonces, o existe un ciclo, o cada par es la cola de alguna cadena w.

Una cadena-w que se forma en una etapa intermedia del procedimiento puede crecer en etapas posteriores a menos que se elimine; por lo tanto, la eliminación inmediata de las cadenas-w tiene un costo de eficiencia potencial.

Dado un problema de intercambio de riñones, un matching es Pareto Eficiente si no hay otro matching que sea débilmente preferido por todos los pacientes-donantes y estrictamente preferido por al menos un par de pacientes-donantes. Un mecanismo de intercambio de riñones es eficiente si siempre selecciona una pareja Pareto Eficiente entre los participantes presentes en un momento dado.

Eficiencia
TEOREMA 1. Considere una regla de selección de cadena tal que cualquier cadena w seleccionada en una ronda no terminal permanezca en el procedimiento, y así el riñón en su cola permanezca disponible para la siguiente ronda. El mecanismo de TTCC, implementado con cualquier regla de selección de cadena de este tipo, es eficiente.

TEOREMA 2. Considere las reglas de selección de la cadena a, d, e, y f. El mecanismo de TTCC, implementado con cualquiera de estas reglas de selección de la cadena, es strategy-proof. (La que no lo cumple es la que remueve la cadena y no escoge al paciente con mayor prioridad).

La Regla e produce un mecanismo eficiente y strategy-proof, mientras que la Regla f renuncia a la eficiencia a fin de aumentar la afluencia de riñones de tipo O a la lista de espera de cadáveres. En el lado negativo, strategy-proof del TTCC se pierde si se adopta una regla de selección de la cadena que elige entre las cadenas w más largas.

Conclusiones

En comparación con los intercambios simples emparejados e indirectos, el intercambio más amplio aplicado por el mecanismo del TTCC crea ganancias adicionales de bienestar de varias maneras.

En primer lugar, al permitir ciclos de intercambio más prolongados, se podrán realizar algunos trasplantes que no se podrían organizar con los intercambios por parejas, y aumentará el margen para mejorar la calidad de los emparejamientos resultantes. Y al permitir más donaciones en vivo, reducirá la competencia por los riñones de los cadáveres.

En segundo lugar, cadenas más largas para el intercambio combinado indirecto y por parejas permitirá que un intercambio indirecto beneficie a más de un par de pacientes donantes, y al hacerlo también aumentará el número de donaciones en vivo. Y tercero, al aumentar el número de pacientes tipo O que pueden recibir donaciones vivas, y al administrar el flujo de riñones y pacientes a la cola de cadáveres, esto puede hacerse de manera que ayude a los pacientes tipo O que no tienen un donante vivo.